Министерство образования Российской Федерации

Международный образовательный консорциум «Открытое образование»

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

АНО «Евразийский открытый факультет»

А.Н. Романников

Линейная алгебра

Учебное пособие

Москва, 2003

УДК 51
ББК 22.143
А 535

Романников А.Н. **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**: Учебное пособие // Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. – М., 2003. – 124 с.

ISBN 5–7764–0356–1

Содержание

Глава 1. Алгебра матриц

1.1. Матрицы. Основные определения

Матрицей $A = (a_{ij})_{m,n}$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, составляющие данную матрицу, называются её элементами; i – номер строки матрицы, j – номер столбца.

Если m=n, то матрица называется квадратной порядка n.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица третьего порядка.

Про элементы a_{ii} такой матрицы говорят, что они стоят на главной диагонали.

Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие по одну из сторон главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ – треугольная матрица третьего порядка

Квадратная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

называется диагональной матрицей. Диагональные матрицы, в которых все диагональные элементы равны, т.е. $\alpha_i = k \ (i = \overline{1,n})$, $k = const$, называются скалярными матрицами.

Если $\alpha_i = 1 \ (i = \overline{1,n})$, то скалярная матрица называется единичной и обозначается буквой E, т.е.:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&...&0\\0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1\end{pmatrix}.$$

Например, матрицы *A*, *B*, *E* являются соответственно диагональной, скалярной и единичной третьего порядка.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Симметрической называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т.е. $a_{ij}=a_{ji}\ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$.

Например, $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&6&8\\3&6&6&9\\4&8&9&1\end{pmatrix}$ – симметрическая матрица четвертого порядка.

Матрица, состоящая из одной строки, называется вектором-строкой, а матрица, состоящая из одного столбца, – вектором-столбцом.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается **O**.

Например, $\mathbf{O}_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ – нулевая матрица размера два на три.

1.2 Действия над матрицами

Две матрицы $A=(a_{ij})_{m,n}$ и $B=(b_{ij})_{m,n}$ называются равными, *A*=*B*, если их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij}=b_{ij},(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})_{m,n}$ и $\mathrm{B}=(b_{ij})_{m,n}$ называется матрица *C*=*A*+*B*, элементы которой c_{ij} равны сумме соответствующих элементов a_{ij} и b_{ij} матриц *A* и *B*, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Например,

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&6\\2&8\\4&10\end{pmatrix},\ C=A+B=\begin{pmatrix}2&9\\4&10\\7&11\end{pmatrix}.$$

Для суммы матриц справедливы следующие свойства:

1. *A*+*B*=*B*+*A* – коммутативность;
2. *A*+*(B*+*C)*=*(A*+*B)*+*C* – ассоциативность;
3. *A*+**O** = *A*.

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ на число α называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)_{m,n}$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на число α, т.е. $b_{ij}=\alpha\cdot \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}$. Например, если $\alpha=3$, а матрица $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$, то $B=\alpha A=\begin{pmatrix}3&9\\6&12\end{pmatrix}$.

Пусть A, B, C – матрицы, α,β – числа. Из определения произведения матрицы на число вытекают следующие свойства:

1. $\alpha \mathrm{A}=\mathrm{A}\alpha$,
2. $1\cdot A=A$,
3. $0\cdot A=\mathbf{O}$,
4. $\alpha(\beta\,\mathrm{A})=(\alpha\,\beta)\mathrm{A}$,
5. $(\alpha+\beta)\,\mathrm{A}=\alpha\,\mathrm{A}+\beta\,\mathrm{A}$,
6. $\alpha\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\alpha\,\mathrm{A}+\alpha\,\mathrm{B}$.

Матрица $(-A)=(-1)\cdot A$ называется противоположной матрице А.

Если матрицы A и B одинаковых размеров, то их разность равна $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ порядка $m\times k$ *на матрицу* $B=(b_{ij})$ порядка $k\times n$ называется матрица $C=A\cdot B$ порядка $m\times n$, элементы которой c_{ij} равны:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Из определения произведения матриц следует: чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы C, необходимо элементы i-ой строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Произведение AB имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

В результате получится матрица, у которой число строк совпадает с числом строк первого сомножителя, а число столбцов – с числом столбцов второго сомножителя.

Для произведения матриц справедливы следующие свойства:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $\alpha\,(AB) = (\alpha\,A)B$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $C(A+B) = CA + CB$

Эти свойства легко доказываются на основе соответствующих определений.

Произведение двух матриц некоммутативно, т.е. в общем случае $AB\neq BA$. В случае прямоугольных матриц легко подобрать примеры, когда одно из этих произведений не будет существовать из-за невыполнения условия равенства числа столбцов сомножителя, стоящего первым, числу строк второго сомножителя. Очевидно, что для квадратных матриц порядка n существуют AB и BA. Однако для всех n, начиная с n=2, можно привести примеры некоммутативных (неперестановочных) матриц.

Пример. Найти произведение AB и BA матриц:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot1&0\cdot0+1\cdot0\\0\cdot0+0\cdot1&0\cdot0+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+0\cdot0&0\cdot1+0\cdot0\\1\cdot0+0\cdot0&1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Пример. Найти произведение матриц А и В.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 2+3\cdot 1 & 0\cdot 3+3\cdot 3 & 0\cdot(-1)+3\cdot 5 & 0\cdot 0+3\cdot 4 \\ 1\cdot 2+5\cdot 1 & 1\cdot 3+5\cdot 3 & 1\cdot(-1)+5\cdot 5 & 1\cdot 0+5\cdot 4 \\ (-1)\cdot 2+1\cdot 1 & (-1)\cdot 3+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 5 & (-1)\cdot 0+1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & 12 \\ 7 & 18 & 24 & 20 \\ -1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Если $AB = BA$, то матрицы и B называются коммутативными. Так, например, единичная матрица Е коммутативна с любой квадратной матрицей того же порядка, причем $AE = EA = A$.

Скалярная матрица может быть представлена в виде произведения элемента матрицы, стоящего на ее главной диагонали, на единичную матрицу того же порядка:

$$A = \alpha E.$$

Легко видеть, что произведение любой квадратной матрицы на скалярную матрицу того же порядка коммутативно.

Квадратную матрицу A можно возвести в степень n , для чего ее надо умножить на саму себя n раз, т.е. $A^n = A \cdot A \cdot ... \cdot A$.

Транспонирование матрицы – это такое преобразование, при котором строки заменяются соответствующими столбцами:

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & ... & a_{m3} \\ a_{14} & a_{24} & ... & a_{m4} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами, которые следуют из определения:

1.$(A')' = A$;

2.$(A+B)' = A' + B'$;

3.$(AB)' = B'A'$.

Если матрица А – симметрическая, то $A' = A$, т.е. симметрическая матрица совпадает со своей транспонированной.

Очевидно, что произведение $C = AA'$ представляет собой симметрическую матрицу. Действительно,

$$C' = (AA')' = (A')'A' = AA' = C.$$

При этом А может быть и прямоугольной матрицей произвольного порядка, С же будет квадратной, порядка, соответствующего числу строк матрицы А.

В различных приложениях используется понятие нормы матрицы.

Под нормой матрицы A=$\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ понимается действительное число ||A||, удовлетворяющее условиям:

а) $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда A=**O**;

б) $\|\alpha A\| = |\alpha| \bullet \|A\|$, ($\alpha$ – число) и, в частности $\|-A\| = \|A\|$;

в) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

г) $\|AB\| \leq \|A\| \bullet \|B\|$,

где A и B – матрицы, для которых соответствующие операции имеют смысл.

Для матрицы A=$(a_{ij})_{m,n}$ произвольного типа рассматриваются главным образом три вида норм:

1) $\|A\|_m = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$ (m – норма);

2) $\|A\|_l = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$ (l – норма);

3) $\|A\|_k = \sqrt{\sum\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|^2}$ (k – норма).

Все они удовлетворяют перечисленным выше условиям.

1.3 Задания для самостоятельной работы по главе 1

1.1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$

1.2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$

1.4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

1.5. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}^n$, все элементы матрицы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

1.6. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$

1.7. Как изменится произведение АВ матриц А и В, если:

а) переставить i-ую и j-ую строки матрицы А?

б) к i-ой строке матрицы А прибавить j-ую строку, умноженную на число с?

в) переставить i-ый и j-ый столбцы матрицы В?

г) к i-му столбцу матрицы В прибавить j-ый столбец, умноженный на число с?

1.8. Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. Доказать, что след АВ равен следу ВА.

1.9. Доказать, что если А – диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица, перестановочная с А, также диагональна.

1.10. Доказать, что умножение матрицы А слева на диагональную матрицу $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ вызывает умножение строк А соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а умножение А на В справа вызывает аналогичное изменение столбцов.

Глава 2. Определители

2.1. Перестановки и подстановки

Для определения и изучения определителей порядка n рассмотрим некоторые понятия, относящиеся к конечным множествам.

Пусть дано некоторое конечное множество N, состоящее из n элементов. Эти элементы пронумеруем с помощью первых n натуральных чисел 1, 2, …, n. Числа 1, 2, …, n можно помимо их естественного порядка упорядочить многими другими способами.

Определение. Всякое расположение чисел 1, 2,…, n в некотором определенном порядке называется перестановкой из n чисел (символов).

Число различных перестановок из n символов равно произведению $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$ (читается n – факториал). Если в некоторой перестановке поменять местами какие-либо два символа, не обязательно стоящие рядом, а все остальные символы оставить на месте, то получим новую перестановку. Такое преобразование называется транспозицией.

Пусть α_1, α_2, …, α_n – некоторая перестановка чисел 1, 2,…, n. Говорят, что в данной перестановке числа α_i и α_j образуют инверсию (беспорядок), если $\alpha_i > \alpha_j$ и $i<j$. Общее число инверсий в перестановке α_1, α_2,…, α_n обозначим через $inv(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Перестановка называется четной, если $inv(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – четное число или ноль и нечетной в противоположном случае.

Пример. Определить четность перестановки 5, 3, 1, 6, 4, 2.

Решение. Число 5 образует четыре инверсии с числами 3, 1, 4, 2. Число 3 образует две инверсии с числами 1 и 2. Число 1 не образует инверсий. Число 6 образует 2 инверсии с числами 4 и 2. Число 4 образует одну инверсию с числом 2. Общее число инверсий inv(5, 3, 1, 6, 4, 2)=9, следовательно, данная перестановка является нечетной.

Очевидно, что перестановка 1, 2,…, n четна при любом n, так как общее число инверсий inv(1, 2, ….., n)=0.

Теорема. Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

Определение. Всякое взаимно однозначное отображение множества первых n натуральных чисел на себя называется подстановкой n–ой степени.

Всякая подстановка может быть записана при помощи двух перестановок

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & ..., & i_n \\ \alpha_{i_1}, & \alpha_{i_2}, & ..., & \alpha_{i_n} \end{pmatrix},$$

где α_{i_k} – это то число, в которое при подстановке переходит число i_k, $k = \overline{1,n}$.

Существуют различные формы записи подстановок, которые получают транспозицией нескольких столбцов.

Всякая подстановка n–ой степени может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & ..., & \alpha_n \end{pmatrix},$$

т.е. с естественным расположением чисел в верхней строке.

Очевидно, что при такой форме записи подстановки отличаются друг от друга перестановками, стоящими в нижней строке. Поэтому число различных подстановок n–ой степени равно числу перестановок из n символов, т.е. равно n!.

Определение. Подстановка называется четной, если общее число инверсий в двух строках любой ее записи четно, и нечетной – в противоположном случае.

Покажем, что четность подстановки не зависит от формы ее записи. Рассмотрим произвольную запись некоторой подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & ..., & i_n \\ \alpha_{i_1}, & \alpha_{i_2}, & ..., & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Перестановки, составляющие верхнюю и нижнюю строки этой записи, могут иметь или одинаковые или противоположные четности. Переход к любой другой записи подстановки можно осуществить с помощью нескольких транспозиций столбцов, причем каждая транспозиция меняет четность обеих перестановок и, следовательно, сохраняет совпадение или противоположность четностей.

2.2. Определители и их свойства

Свяжем с каждой квадратной матрицей А=$(a_{ij})_{n,m}$ определенную численную характеристику, называемую определителем, соответствующим этой матрице, и обозначим его |А|.

Если n=1, т.е. А=(a_{11}), то определитель первого порядка, соответствующий этой матрице, равен величине элемента a_{11}, т.е. |А|=a_{11}.

Если n=2, то матрица А имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.2.1)$$

Определителем второго порядка, соответствующим этой матрице, назовем число

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2.2.2)$$

Формула (2.2.2.) представляет собой правило вычисления определителя второго порядка по элементам соответствующей ему матрицы.

Перейдем теперь к понятию определителя, соответствующего матрице А порядка n>2, и установим общий закон, по которому определитель любого порядка будет выражаться через элементы соответствующей ему матрицы.

Всякий член определителя второго порядка есть произведение двух элементов, стоящих как в разных строках, так и в разных столбцах матрицы А, причем в качестве членов определителя использованы все произведения такого вида, какие только можно составить из элементов матрицы второго порядка (их всего два).

Пусть дана квадратная матрица А порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.2.3)$$

Рассмотрим всевозможные произведения по n элементов этой матрицы, расположенных в разных строках и в разных столбцах, т.е. произведения вида

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}, \qquad (2.2.4)$$

где индексы α_1, α_2, …, α_n составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2,…, n. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, т.е. равно n!. Будем считать все эти произведения членами определителя порядка n, соответствующего матрице (2.2.3).

Определим знак, с каким произведение (2.2.4) входит в состав определителя.

Рассматривая определитель второго порядка (2.2.2), отметим, что член входит со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус, если его индексы составляют нечетную подстановку. Распространим и эту закономерность на определитель порядка n.

Определение. Определителем порядка n, соответствующим матрице (2.2.3), называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная из всевозможных произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем член берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус – в противоположном случае, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum^{n!} (-1)^{inv(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}, \tag{2.2.5}$$

где суммирование распространяется на всевозможные перестановки из n чисел 1, 2,…, n.

Рассмотрим свойства определителей.

1. Свойство равноправности строк и столбцов. При транспонировании, т.е. при замене каждой строки определителя столбцом с тем же номером, определитель не меняется.

Пусть определитель

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.2.6}$$

соответствует матрице A', полученной транспонированием матрицы A.

Всякий член определителя (2.2.5) имеет вид

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}, \tag{2.2.7}$$

где вторые индексы составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2, …, n. Однако все множители произведения (2.2.7) и в определителе (2.2.6) остаются в разных строках и в разных столбцах, т.е. (2.2.7) является членом и для транспонированного определителя $|A'|$. Верно, очевидно, и обратное, и поэтому определители (2.2.5) и (2.2.6) состоят из одних и тех же членов. Знак члена (2.2.7) в определителе (2.2.5) определяется четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

а знак члена (2.2.7) в определителе (2.2.6) определяется четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{2.2.9}$$

Подстановки (2.2.8) и (2.2.9) имеют, очевидно, одну и ту же четность. Следовательно, определители (2.2.5) и (2.2.6) имеют одинаковые члены, взятые с одинаковыми знаками, т.е. равны друг другу.

Доказанное свойство означает равноправность строк и столбцов определителя и позволяет все последующие свойства доказывать лишь для строк, не доказывая их справедливость для столбцов.

2. Свойство антисимметрии при перестановке двух строк. При перестановке двух строк определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

Пусть в определителе (2.2.5) переставляются i–ая и j–ая строки, а все остальные строки остаются на месте. В результате получим определитель (2.2.10).

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & (i) \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & (j) \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \end{array} \tag{2.2.10}$$

Если (2.2.7) есть член определителя (2.2.5), то все его множители и в определителе (2.2.10) остаются, очевидно, в разных строках и в разных столбцах. Таким образом, определители (2.2.5) и (2.2.10) состоят из одних и тех же членов. Члену (2.2.7) в определителе (2.2.5) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{2.2.11}$$

а в определителе (2.2.10) – подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2.2.12}$$

т.к. элемент a_{ij_i} стоит в (2.2.10) в j–ой строке, но остается в α_i-ом столбце.

Подстановка (2.2.12) получена из подстановки (2.2.11) одной транспозицией в верхней строке, т.е. имеет противоположную четность.

Отсюда следует, что все члены определителя (2.2.5) входят в определитель (2.2.10) с обратными знаками, т.е. определители отличаются друг от друга лишь знаком.

3. Линейное свойство определителя.

Будем говорить, что некоторая строка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ является линейной комбинацией строк $(b_1, b_2, ..., b_n)$ и $(c_1, c_2, ..., c_n)$ с коэффициентами λ и μ, если $a_j = \lambda b_j + \mu c_j$, $j = \overline{1, n}$.

Если в определителе *n*–го порядка |A| некоторая *i*-ая строка $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ является линейной комбинацией строк $(b_1, b_2, ..., b_n)$ и $(c_1, c_2, ..., c_n)$ с коэффициентами λ и μ, то $|A| = \lambda|A_1| + \mu|A_2|$, где $|A_1|$ – определитель, у которого i–ая строка равна $(b_1, b_2, ..., b_n)$, а все остальные те же, что и у |A|, а $|A_2|$ – определитель, у которого i–ая строка равна $(c_1, c_2, ..., c_n)$, а все остальные строки те же, что и у |A|.

Всякий член определителя |A| можно представить в виде

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \left(\lambda b_{\alpha_i} + \mu c_{\alpha_i}\right) \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} =$$
$$= \lambda \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} + \mu \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot c_{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Группируя первые и вторые слагаемые и вынося общие множители, получим $|A| = \lambda|A_1| + \mu|A_2|$.

Линейное свойство справедливо и для случая, когда i-ая строка является линейной комбинацией m строк, m > 2.

Доказанные три свойства являются основными свойствами определителя. Следующие пять свойств являются логическими следствиями трех основных свойств.

Следствие 1. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю. Действительно, при перестановке двух одинаковых строк, с одной стороны, определитель |A| не изменится, а с другой стороны, в силу свойства 2 изменит знак на противоположный. Таким образом,

$$|A|=|-A|, \text{ откуда } |A|=0.$$

Следствие 2. Умножение всех элементов некоторой строки определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число λ. Иными словами общий множитель всех элементов можно вынести за знак этого определителя. Это свойство следует из свойства 3 при $\mu=0$.

Следствие 3. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю. Это свойство вытекает из предыдущего при $\lambda = 0$.

Следствие 4. Если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю. Действительно, в силу следствия 2 множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего останется определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю.

Следствие 5. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится. Действительно, полученный в результате определитель в силу свойства 3 можно разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй, в силу следствия 4, равен нулю. Следствие 5 широко применяется при вычислении определителей порядка $n \geq 3$.

Замечание. В силу свойства 1 все доказанные утверждения справедливы и для столбцов определителя.

2.3. Миноры и алгебраические дополнения

Вычисление определителей на основании данного выше определения представляет некоторые трудности. Существует более простой метод вычисления определителей, основанный на том, что определитель порядка *n* может быть выражен через определители более низких порядков.

Пусть дана квадратная матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{n,n}$. Будем называть минором элемента a_{ij} матрицы A определитель (n-1)-го порядка, соответствующий матрице, которая получается из матрицы A вычеркиванием i–ой строки и j–го столбца. Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом M_{ij}.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} M_{ij}$.

Например, в предыдущей матрице $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.

Теорема. Произведение любого элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение в определителе |A| является алгебраической суммой, слагаемые которой будут некоторыми членами определителя |A|, причем их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с которыми они входят в состав определителя.

Покажем сначала, что произведение $a_{11} \cdot A_{11}$ является алгебраической суммой, слагаемые которой удовлетворяют условию теоремы.

В определителе

$$A = \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

M_{11} занимает правый нижний угол. Число $i+j$ является в этом случае четным и поэтому $A_{11}=M_{11}$.

Произвольный член

$$a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n} \tag{2.3.1}$$

M_{11} имеет в миноре M_{11} знак $(-1)^{inv(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)}$, где $inv(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)$ есть число инверсий в подстановке $\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Умножая a_{11} на (2.3.1), получим произведение

$$a_{11} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n} \tag{2.3.2}$$

элементов, расположенных в разных строках и разных столбцах определителя |A|. Поэтому каждое такое произведение (2.3.2) будет членом определителя |A|. Знаки членов (2.3.2) и (2.3.1) совпадают, так как знак члена (2.3.2) определяется выражением $(-1)^2\,(-1)^{inv(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)}=(-1)^{inv(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)}$. Такой же знак имеет каждый член (2.2.3) и в определителе |A|, так как четность подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, составленной из индексов этого члена, определяется выражением $(-1)^{inv(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)}$.

Перейдем к рассмотрению общего случая.

Переставляя соседние строки и столбцы определителя |A|, передвинем произвольный элемент a_{ij} в левый верхний угол. Для этой цели переставим i-ую строку на (i–1) раз и j-ый столбец на (j–1) раз. Очевидно, что при данной перестановке взаимное расположение строк и столбцов в миноре M_{ij} остается без изменения. После этих преобразований получим новый определитель $|A_1|$ с тем же минором M_{ij} для элемента a_{ij}, но расположенный в правом нижнем углу определителя $|A_1|$.

Как доказано выше, произведение $a_{ij}\ M_{ij}$ является суммой некоторого числа членов определителя $|A_1|$. Однако определитель $|A_1|$ получен из определителя |A| путем (i+j-2) перестановок строк и столбцов, и поэтому члены определителя $|A_1|$ отличаются от соответствующих членов определителя |A| лишь знаком $(-1)^{i+j}$. Отсюда следует, что произведение $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$ состоит из некоторого количества членов определителя |A|, взятых с такими же знаками, какие они имеют в этом определителе. Теорема доказана.

2.4. Вычисление определителей n-го порядка

Полученные в предыдущем параграфе результаты позволяют свести вычисление определителей порядка n к вычислению нескольких определителей порядка n-1.

Действительно, $a_{ij}A_{ij}$ является суммой нескольких членов определителя |A|. Легко подсчитать число этих членов: оно равно числу членов в миноре M_{ij}, т.е. равно (n-1)!.

Рассмотрим теперь все произведения элементов i-ой строки на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е. произведения

$$a_{i1}\cdot A_{i1}, a_{i2}\cdot A_{i2}, ..., a_{in}\cdot A_{in} \tag{2.4.1}$$

С одной стороны, никакой член определителя |A| не может войти в состав двух разных произведений (2.4.1), так как все члены определителя, входящие в любое произведение $a_{ij}\cdot A_{ij}$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, содержат из i-й строки элемент a_{ij} и поэтому отличается от членов, входящих в остальные произведения.

С другой стороны, общее число членов определителя |A|, входящих во все произведения (2.3.1), равно $((n+1)!)\cdot n = n!$, т.е. совпадает с числом членов определителя порядка n.

Таким образом, мы доказали, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + ... + a_{in}\cdot A_{in} \tag{2.4.2}$$

Аналогично разложение определителя можно получить и по любому его столбцу.

Теорема. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (другого столбца) равна нулю.

Перепишем выражение (2.4.2) в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + ... + a_{in}\cdot A_{in} \tag{2.4.3}$$

так как алгебраические дополнения A_{ij} не зависит от элементов i-ой строки, то равенство (2.4.3) является тождеством относительно элементов $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$.

Заменив элементы $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ соответствующими элементами любой k-ой строки, $k \neq i$, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}\cdot A_{k1} + a_{k2}\cdot A_{k2} + ... + a_{kn}\cdot A_{kn} \tag{2.4.4}$$

Левая часть равенства (2.4.4) есть определитель, содержащий две одинаковые строки и, следовательно, равна нулю. Теорема доказана.

Вычисление определителей n-го порядка производится на основании соотношения (2.4.2) разложением определителя по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. В этом случае необходимо вычислить n определителей порядка n-1. Используя следствие 5, можно свести вычисления определителя порядка n к вычислению лишь одного определителя порядка (n-1). Для этого на основании следствия 5 необходимо так преобразовать определитель порядка n, чтобы некоторая строка (столбец) содержала только один ненулевой элемент.

Пример. Вычислить определитель.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. На основании свойства определителей, именно следствия 5, преобразуем данный определитель следующим образом: из элементов второго столбца вычтем удвоенные соответствующие элементы первого столбца:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 0 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & -2 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Элемент $a_{52} = 1$ назовем направляющим элементом. Второй столбец преобразуем в единичный с единицей на месте направляющего элемента a_{52}. Для этого ко второй и к четвертой строкам прибавим направляющую пятую строку, соответственно умноженную на 1 и на 2.

Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & 11 & 13 & 9 \\ 6 & 0 & 13 & 9 & 7 \\ 8 & 0 & 14 & 15 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по элементам второго столбца

$$|A| = (-1)^{5+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 11 & 13 & 9 \\ 6 & 13 & 9 & 7 \\ 8 & 14 & 15 & 10 \end{vmatrix}.$$

Из элементов второй строки вычтем удвоенные соответствующие элементы первой строки

$$|A| = -\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 13 & 9 & 7 \\ 8 & 14 & 15 & 10 \end{vmatrix}.$$

Выбирая в качестве направляющего элемента элемент $a_{21}=1$, преобразуем вторую строку в единичную. Для этого ко второму, третьему и четвертому столбцам прибавим первый столбец, умноженный на –1.

$$|A|=-\begin{vmatrix}3&2&3&1\\1&0&0&0\\6&7&3&1\\8&6&7&2\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам второй строки:

$$|A|=(-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&3&1\\7&3&1\\6&7&2\end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую и разложим определитель по элементам второй строки. В результате получим

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&1\\5&0&0\\6&7&2\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot5\cdot\begin{vmatrix}3&1\\7&2\end{vmatrix}=-5(6-7)=5\,.$$

2.5. Задания для самостоятельной работы по главе 2

2.1. $\begin{vmatrix}\sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha\\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta\end{vmatrix}$

2.2. $\begin{vmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2}\\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}$

2.3. $\begin{vmatrix}1 & \log_b a\\ \log_a b & 1\end{vmatrix}$

2.4. Доказать, что для равенства нулю определителя второго порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки были пропорциональны. То же верно и для столбцов (если некоторые элементы определителя равны нулю, то пропорциональность можно понимать в том смысле, что элементы одной строки получаются из соответствующих элементов другой строки умножением на одно и то же число, быть может, равное нулю).

2.5. $\begin{vmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&-1&8\end{vmatrix}$

2.6. Показать, что значение дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где по крайней мере одно из чисел c или d отлично от нуля, тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$

2.7. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, при условии, что все его элементы равны 1 или (-1).

2.8. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, при условии, что все его элементы равны 1 или 0.

2.9. Доказать, что от любой перестановки чисел 1,2,…,n, содержащей k инверсий, можно перейти к исходному положению путем k смежных транспозиций, но нельзя перейти путем меньшего числа таких транспозиций.

2.10. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

2.11. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

2.12. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

2.13. Доказать, что определитель не изменится, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец.

2.14. Разлагая по 3-ей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

2.15. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Глава 3. Алгебра матриц (продолжение)

3.1 Обратная матрица

Пусть задана квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n.

Определение. Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется обратной к матрице A, если она удовлетворяет соотношению

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \tag{3.1.1}$$

Присоединенной матрицей квадратной матрицы A называется матрица A*, каждый элемент A_{ij} которой есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} транспонированной матрицы A, т.е.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется невырожденной (неособенной), если ее определитель $|A|$ отличен от нуля, и вырожденной, если $|A|$=0.

Теорема. Для всякой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая следующим выражением:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Докажем сначала единственность. Предположим, что существуют две различные обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда имеем

$$A_1^{-1}AA_2^{-1} = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1}E = A_1^{-1} \tag{3.1.3}$$

$$A_1^{-1}AA_2^{-1} = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1} \tag{3.1.4}$$

Из двух последних равенств следует, что $A_1^{-1} = A_2^{-1}$.

Покажем теперь, что выражение (3.1.2) действительно задает обратную матрицу. Составим произведение AA^*. Очевидно, что элементами данного произведения являются суммы произведений элементов строк матрицы A на алгебраические дополнения, т.е. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. Как известно из гл.2, при i=j $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ =0. В итоге получаем

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & ... & 0 \\ 0 & |A| & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & |A| \end{pmatrix} = |A|E,$$

или $A\dfrac{1}{|A|}A^* = E$,

откуда $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$.

В заключение отметим, что A^* перестановочна с A, т.е. $AA^* = A^*A$, что видно непосредственно. Теорема доказана.

Пример. Вычислить обратную матрицу для матрицы A, равной:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $|A| = -7 \neq 0$. Вычислим присоединенную матрицу A^*:

A_{11}=-3, A_{12}=-1, A_{21}=-1, A_{22}=2,

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \; A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся, что $AA^{-1}=E$.

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

1. Определитель обратной матрицы равен обратной величине определителя исходной матрицы, т.е. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. Произведение двух невырожденных матриц A и B является невырожденной матрицей и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Если матрица A невырожденная, то $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

4. Обратная матрица к транспонированной является транспонированной матрицей к обратной, т.е. $(A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$.

3.2. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$. Выделим в матрице произвольно k строк и k столбцов $(k \leq m, k \leq n)$.Определитель $M_к$, стоящий на пересечении выделенных строк и столбцов, называется минором k-го порядка матрицы A. Число миноров k-го порядка равно $C_m^k C_n^k$.

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля ее миноров.

Ранг матрицы обозначается $r(A)$. Ранг матрицы равен нулю только у нулевой матрицы. Если матрица отлична от нулевой, то

$$1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Если ранг матрицы равен r, то среди миноров этой матрицы есть, по крайней мере, один минор M_r порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядков $(r+1)$ и выше равны нулю. Следует отметить, что если все миноры некоторого порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю все миноры более высоких порядков. Справедливость этого утверждения следует из теоремы о разложении определителя.

Одним из способов вычисления ранга матрицы является метод элементарных преобразований матрицы.

Перечислим элементарные преобразования:

1. Перестановка двух строк или столбцов.
2. Умножение всех элементов строки или столбца на любое число, отличное от нуля.
3. Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Доказательство. Справедливость теоремы относительно преобразований 1 и 2 доказывается на основании соответствующих свойств определителей.

Докажем теорему относительно преобразования 3. Рассмотрим матрицу *B*, полученную из матрицы *A* прибавлением к *i*-му столбцу *k*-го столбца, умноженного на число $\lambda \neq 0$:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} + \lambda a_{mk} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг матрицы *A* равен *r(A)*. Покажем, что $r(B) \leq r(A)$. Для этого докажем, что любой минор M_{r+1} порядка *r*+1 матрицы *B* равен нулю.

Рассмотрим минор M_{r+1} матрицы *B*, который не содержит *i*-ый столбец. В этом случае M_{r+1} в точности соответствует некоторому минору порядка *r*+1 матрицы *A* и, следовательно, равен нулю. Если минор M_{r+1} содержит i-ый и k-ый столбцы, то по свойству определителей он равен сумме двух миноров порядка *r*+1, причем один из них равен нулю, так как совпадает с минором (*r*+1)-го порядка матрицы *A*, а второй минор равен нулю, так как *i*-ый и *k*-ый столбцы его пропорциональны.

Пусть минор M_{r+1} содержит *i*-ый столбец, но не содержит *k*-ый столбец. В этом случае минор M_{r+1} равен сумме двух миноров, один из которых совпадает с минором порядка (*r*+1) матрицы *A* и поэтому равен нулю, а второй минор равен нулю, так как отличается от соответствующего минора матрицы *A* множителем λ.

Таким образом,

$$r(B) \leq r(A) \tag{3.2.1}$$

Матрицу *A* можно получить из матрицы В с помощью элементарного преобразования 3, следовательно,

$$r(A) \leq r(B) \tag{3.2.2}$$

Из полученных равенств (3.2.1) и (3.2.2) следует, что $r(A) = r(B)$.

Теорема доказана.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, содержащему единичную подматрицу порядка *r*.

Пример. Вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Осуществим над матрицей *A* элементарные преобразования:

$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке матрицы первую строку, умноженную на (–2), третью строку оставим без изменения, к четвертой строке прибавим первую строку, умноженную на (–1). Получим матрицу

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5 & 2\\ 0 & -1 & -7 & -9 & -1\\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Прибавим первый столбец, умноженный на (–2), на (–4), на (–5) и на (–2) соответственно ко второму, третьему, четвертому и пятому столбцам. Затем вторую строку прибавим к третьей и четвертой строкам. Умножим вторую строку на –1. Получим:

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Прибавим второй столбец, умноженный на нужные множители, к третьему, четвертому и пятому столбцам:

$$A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

r(A)=2.

Определение. Минор M_r, отличный от нуля, называется базисным минором матрицы. Число базисных миноров матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ не больше чем $C_m^r C_n^r$. Строки и столбцы, на пересечении которых стоит некоторый базисный минор, называются базисным.

3.3. Линейная зависимость и независимость строк матрицы

Введем понятие линейной зависимости и независимости строк матрицы.

Пусть дана некоторая матрица $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $\overline{l_1},\overline{l_2},...,\overline{l_m}$ ее строки. Будем говорить, что *k*-ая ($1\le k\le m$) строка матрицы является линейной комбинацией остальных ее строк (линейно выражается через остальные), если

$$\overline{l_k}=\lambda_1\overline{l_1}+\lambda_2\overline{l_2}+...+\lambda_{k-1}\overline{l_{k-1}}+\lambda_{k+1}\overline{l_{k+1}}+...+\lambda_m\overline{l_m} \qquad (3.3.1)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},...,\lambda_m$ – какие-то числа (некоторые из этих чисел или даже все могут быть равны нулю). Это означает наличие следующих равенств между элементами столбцов:

$$a_{k1}=\lambda_1 a_{11}+...+\lambda_{k-1}a_{k-1,1}+\lambda_{k+!}a_{R+1,1}+...+\lambda_m a_{m1}$$

$$a_{k1}=\lambda_1 a_{12}+...+\lambda_{k-1}a_{k-1,2}+\lambda_{k+1}a_{R+1,2}+...+\lambda_m a_{m2}$$

....

$$a_{k1}=\lambda_1 a_{1n}+...+\lambda_{k-1}a_{k-1,n}+\lambda_{k+!}a_{R+1,n}+...+\lambda_m a_{mn}$$

или $a_{ij}=\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n}\lambda_i a_{ij}$, $j=\overline{1,n}$.

Из (3.3.1) вытекает, что

$$\lambda_1\overline{l_1}+\lambda_2\overline{l_2}+\ldots+\lambda_{k-1}\overline{l_{k-1}}+(-1)\overline{l_k}+\lambda_{k+1}\overline{l_{k+1}}+\ldots+\lambda_m\overline{l_m}=\bar{0}, \qquad (3.3.2)$$

где $\bar{0}$ – нулевая строка.

Определение. Строки $\overline{l_1},\overline{l_2},\ldots,\overline{l_m}$ матрицы A линейно зависимы, если существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, не все равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1\overline{l_1}+\alpha_2\overline{l_2}+\ldots+\alpha_m\overline{l_m}=\bar{0} \qquad (3.3.3)$$

Если равенство (3.3.3) справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$, то строки $\overline{l_1},\overline{l_2},\ldots,\overline{l_m}$ называются линейно независимыми. Соотношение (3.3.2) показывает, что если одна из строк линейно выражается через остальные, то строки линейно зависимы.

Легко видеть и обратное: если строки линейно зависимы, то найдется строка, которая будет линейной комбинацией остальных строк.

Пусть, например, в (3.3.3) $\alpha_1\neq 0$, тогда $\overline{l_1}=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{l_2}-\ldots-\dfrac{\alpha_m}{\alpha_1}\overline{l_m}$.

Определение. Пусть в матрице A выделен некоторый минор r-го порядка M_r и пусть минор $(r+1)$-го порядка этой же матрицы M_{r+1} целиком содержит внутри себя минор M_r. Будем говорить, что в этом случае минор M_{r+1} окаймляет минор M_r (или M_{r+1} является окаймляющим для M_r).

Теперь докажем важную лемму.

Лемма об окаймляющих минорах. Если минор M_r порядка r матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то любая строка (столбец) матрицы A является линейной комбинацией ее строк (столбцов), составляющих M_r.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что отличный от нуля минор r-го порядка M_r стоит в левом верхнем углу матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для первых k строк матрицы A утверждение леммы очевидно: достаточно в линейную комбинацию включить эту же строку с коэффициентом, равным единице, а остальные – с коэффициентами, равными нулю.

Докажем теперь, что и остальные строки матрицы A линейно выражаются через первые k строк. Для этого построим минор $(r+1)$-го порядка M_{r+1} путем добавления к минору M_r k-ой строки ($r\le k\le m$) и l-го столбца ($1\le l\le n$):

$$M_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kl} \end{pmatrix}.$$

Полученный минор равен нулю при всех *k* и *l*. Если $l \le r$, то он равен нулю как содержащий два одинаковых столбца. Если $l > r$, то полученный минор M_{r+1} является окаймляющим минором для M_r и, следовательно, равен нулю по условию леммы.

Разложим минор M_{r+1} по элементам последнего *l*-го столбца:

$$a_{1l}A_1 + a_{2l}A_2 + \dots + a_{rl}A_r + a_{kl}A_{r+1} = 0 \qquad (3.3.4)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$ – алгебраические дополнения к элементам $a_{1l}, a_{2l}, \dots, a_{kl}$. Алгебраические дополнение A_{r+1} есть минор M_r матрицы *A*, поэтому $A_{r+1} \ne 0$. Разделим (3.3.4) на $A_{r+1} \ne 0$ и выразим a_{kl} через $a_{1l}, a_{2l}, \dots, a_{rl}$:

$$a_{kl} = \gamma_1 a_{1l} + \gamma_2 a_{2l} + \dots + \gamma_r a_{rl} \qquad (3.3.5)$$

где $\gamma_i = -\dfrac{A_i}{A_{r+1}}$, $i = 1,2,\dots,r$.

Полагая $l = 1,2,\dots,n$, получим:

$$\begin{aligned} a_{k1} &= \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{21} + \dots + \gamma_r a_{r1} \\ a_{k2} &= \gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22} + \dots + \gamma_r a_{r2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kn} &= \gamma_1 a_{1n} + \gamma_2 a_{2n} + \dots + \gamma_r a_{rn} \end{aligned} \qquad (3.3.6)$$

Выражение (3.3.6) означает, что *k*-я строка матрицы *A* линейно выражается через первые r строк.

Так как при транспонировании матрицы значения ее миноров не изменяются (ввиду свойства определителей), то все доказанное справедливо и для столбцов. Теорема доказана.

Следствие I. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов). Действительно, базисный минор матрицы отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю.

Следствие II. Определитель *n*-го порядка тогда и только тогда равен нулю, когда он содержит линейно зависимые строки (столбцы). Достаточность линейной зависимости строк (столбцов) для равенства определителя нулю доказана ранее как свойство определителей.

Докажем необходимость. Пусть задана квадратная матрица *n*-го порядка, единственный минор которой M_n равен нулю. Отсюда следует, что ранг этой матрицы меньше n, т.е. найдется хотя бы одна строка, которая является линейной комбинацией базисных строк этой матрицы.

Докажем еще одну теорему о ранге матрицы.

Теорема. Максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов и равно рангу этой матрицы.

Доказательство. Пусть ранг матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ равен r. Тогда любые ее k базисных строк являются линейно независимыми, иначе базисный минор M_r был бы равен нулю. С другой стороны, любые r+1 и более строк линейно зависимы. Предположив противное, мы могли бы найти минор порядка более чем r, отличный от нуля по следствию 2 предыдущей леммы. Последнее противоречит тому, что максимальный порядок миноров, отличных от нуля, равен r. Все доказанное для строк справедливо и для столбцов.

В заключение изложим еще один метод нахождения ранга матрицы. Ранг матрицы можно определить, если найти минор максимального порядка, отличный от нуля.

На первый взгляд, это требует вычисления хотя и конечного, но быть может, очень большого числа миноров этой матрицы.

Следующая теорема позволяет, однако, внести в этот значительные упрощения.

Теорема. Если минор M_r матрицы A отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы равен r.

Доказательство. Достаточно показать, что любая подсистема строк матрицы $\overline{l_1^*}, \overline{l_2^*}, ..., \overline{l_s^*}$ при S>r будет в условиях теоремы линейно зависимой (отсюда будет следовать, что r – максимальное число линейно независимых строк матрицы или любые ее миноры порядка больше чем k равны нулю).

Предположим противное. Пусть строки $\overline{l_1^*}, \overline{l_2^*}, ..., \overline{l_s^*}$ линейно независимы. По лемме об окаймляющих минорах каждая из них будет линейно выражаться через строки $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_s}$, в которых стоит минор M_r и которые, ввиду того, что M_r отличен от нуля, линейно независимы:

$$\begin{aligned} \overline{l_1^*} &= \alpha_{11}\overline{l_1} + \alpha_{12}\overline{l_2} + ... + \alpha_{1r}\overline{l_r} \\ \overline{l_2^*} &= \alpha_{21}\overline{l_1} + \alpha_{22}\overline{l_2} + ... + \alpha_{2r}\overline{l_r} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{l_s^*} &= \alpha_{s1}\overline{l_1} + \alpha_{s2}\overline{l_2} + ... + \alpha_{sr}\overline{l_r} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Рассмотрим матрицу K из коэффициентов линейных выражений (3.3.7):

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1\kappa} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2r} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{S1} & \alpha_{S2} & ... & \alpha_{Sr} \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы обозначим через $\overline{K_1}, \overline{K_2}, ..., \overline{K_S}$. Они будут линейно зависимы, так как ранг матрицы K, т.е. максимальное число ее линейно независимых строк, не превышает $r<S$. Поэтому существуют такие числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_S$, не все равны нулю, что

$$\beta_1\overline{K_1} + \beta_2\overline{K_2} + ... + \beta_S\overline{K_S} = \overline{0}.$$

Перейдем к равенству компонент

$$\sum_{i=1}^{S}\beta_i\alpha_{ij} = 0, \ j = \overline{1,r}. \tag{3.3.8}$$

Теперь рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\beta_1\overline{l_1^*} + \beta_2\overline{l_2^*} + ... + \beta_S\overline{l_S^*} \text{ или } \sum_{i=1}^{S}\beta_i\overline{l_i^*}$$

Используя (3.3.7) и (3.3.8), получаем

$$\sum_{i=1}^{S}\beta_i\overline{l_i^*}=\sum_{i=1}^{S}\beta_i\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\overline{l_j}\right)=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{S}\beta_i\alpha_{ij}\right)\overline{l_j}=\overline{0},$$

что противоречит линейной независимости строк $\overline{l_1^*},\overline{l_2^*},...,\overline{l_s^*}$.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, любые $S>r$ строк в условиях теоремы линейно зависимы. Теорема доказана.

Рассмотрим правило вычисления ранга матрицы – метод окаймляющих миноров, основанный на данной теореме.

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор r-го порядка M_r, отличный от нуля, то требуется вычислить лишь миноры $(r+1)$-го порядка, окаймляющие минор M_r. Если они равны нулю, то ранг матрицы равен r. Этот метод применяется и в том случае, если мы не только вычисляем ранг матрицы, но и определяем, какие столбцы (строки) составляют базисный минор матрицы.

Пример. Вычислить методом окаймляющих миноров ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4&5&2\\2&3&1&1&3\\0&1&7&9&1\\1&3&11&14&3\end{pmatrix}.$$

Решение. Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A, отличен от нуля:

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Однако все окаймляющие его миноры третьего порядка равны нулю:

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&1\\0&1&7\end{vmatrix}=0;\qquad M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&3&1\\0&1&9\end{vmatrix}=0;$$

$$M_3^{(3)}=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&3&3\\0&1&1\end{vmatrix}=0;\qquad M_3^{(4)}=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&1\\1&1&11\end{vmatrix}=0;$$

$$M_3^{(5)}=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&3&1\\1&3&14\end{vmatrix}=0;\qquad M_3^{(6)}=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&3&3\\1&3&3\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен двум: $r(A)=2$.

Первая и вторая строки, первый и второй столбцы в данной матрице являются базисными. Остальные строки и столбцы являются их линейными комбинациями. В самом деле, для строк справедливы следующие равенства:

$$\overline{l_3}=2\overline{l_1}+(-1)\overline{l_2},$$
$$\overline{l_4}=3\overline{l_1}+(-1)\overline{l_2}.$$

В заключение отметим справедливость следующих свойств:

1) ранг произведения матриц не больше ранга каждого из сомножителей;

2) ранг произведения произвольной матрицы A справа или слева на невырожденную квадратную матрицу Q равен рангу матрицы A.

3.4. Многочленные матрицы

Определение. Многочленной матрицей или λ-матрицей называется прямоугольная матрица, элементы которой являются многочленами от одного переменного λ с числовыми коэффициентами.

Над λ-матрицами можно совершать элементарные преобразования. К ним относятся:

1. перестановка двух строк (столбцов);
2. умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любой многочлен $f(\lambda)$.

Две λ-матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ одинаковых размеров называются эквивалентными: $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, если от матрицы $A(\lambda)$ к $B(\lambda)$ можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Пример. Доказать эквивалентность матриц

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{pmatrix}, \qquad B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2) \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Поменяем местами в матрице $A(\lambda)$ первый и второй столбцы:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 - 1 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

2. Из второй строки вычтем первую, умноженную на ($\lambda + 1$):

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

3. Умножим вторую строку на (–1) и заметим, что

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2).$$

Получим

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2) \end{pmatrix}.$$

4. Вычтем из второго столбца первый, умноженный на $(\lambda - 1)$, получим

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2) \end{pmatrix}.$$

Множество всех λ-матриц данных размеров $[m \times n]$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных матриц. Матрицы, эквивалентные между собой, образуют один класс, не эквивалентные – другой.

Каждый класс эквивалентных матриц характеризуется канонической, или нормальной, λ-матрицей данных размеров.

Определение. Канонической, или нормальной, λ-матрицей размеров $[m\times n]$ называется λ-матрица, у которой на главной диагонали стоят многочлены $E_1(\lambda),E_2(\lambda),...,E_p(\lambda)$, где p – меньшее из чисел m и n ($p=\min\{m,n\}$), причем не равные нулю многочлены имеют старшие коэффициенты, равные 1, и каждый следующий многочлен делиться на предыдущий. Все элементы вне главной диагонали равны 0.

Из определения следует, что если среди многочленов имеются многочлены нулевой степени, то они в начале главной диагонали. Если имеются нули, то они стоят в конце главной диагонали.

Матрица $B(\lambda)$ предыдущего примера есть каноническая. Матрица

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda(\lambda-3)&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

также каноническая.

Каждый класс λ-матриц содержит единственную каноническую λ-матрицу, т.е. каждая λ-матрица эквивалентна единственной канонической матрице, которая называется канонической формой или нормальной формой данной матрицы.

Многочлены, стоящие на главной диагонали канонической формы данной λ-матрицы, называются инвариантными множителями данной матрицы.

Один из методов вычисления инвариантных множителей состоит в приведении данной λ-матрицы к канонической форме.

Так, для матрицы $C(\lambda)$ предыдущего примера инвариантными множителями являются

$$E_1(\lambda)=1,\ E_2(\lambda)=\lambda,\ E_3(\lambda)=\lambda(\lambda-3),\ E_4(\lambda)=0.$$

Из сказанного следует, что наличие одной и той же совокупности инвариантных множителей является необходимым и достаточным условием эквивалентности λ-матриц.

Приведение λ-матриц к каноническому виду сводится к определению инвариантных множителей

$$E_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)},\ k=1,2,...,r;\ D_0=1,$$

где r – ранг λ-матрицы; D_k – наибольший общий делитель миноров k-го порядка, взятый со старшим коэффициентом, равным 1.

Пример. Пусть дана λ-матрица

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-2\end{pmatrix}.$$

Решение. Очевидно, наибольший общий делитель первого порядка D_1=1, т.е. $E_1(\lambda)=1$.

Определим миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2,\qquad \begin{vmatrix}-1&0\\\lambda-2&-1\end{vmatrix}=1\qquad \text{и т.д.}$$

Уже этих данных достаточно для того, чтобы сделать вывод: D_2=1, следовательно, $E_2 = \dfrac{D_2}{D_1} = 1$.

Определяем D_3

$$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3,$$

Следовательно, $E_3 = \dfrac{(\lambda-2)^3}{1} = (\lambda-2)^3$.

Таким образом, канонической формой данной матрицы является следующая λ-матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{pmatrix}.$$

Матричным многочленом называется выражение вида

$$F(\lambda) = A_0\lambda^S + A_1\lambda^{S-1} + \ldots + A_S,$$

где λ – переменное; $A_0, A_1, \ldots, A_S$ – квадратные матрицы порядка n с числовыми элементами.

Если $A_0 \neq 0$, то S называют степенью матричного многочлена, n – порядком матричного многочлена.

Любую квадратичную λ-матрицу можно представить в виде матричного многочлена. Справедливо, очевидно, и обратное утверждение, т.е. любой матричный многочлен можно представить в виде некоторой квадратной λ-матрицы.

Справедливость данных утверждений со всей очевидностью вытекает из свойств операций над матрицами. Остановимся на следующих примерах:

Пример. Представить многочленную матрицу

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

в виде матричного многочлена можно следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Матричный многочлен

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

можно представить в виде следующей многочленной матрицы (λ-матрицы)

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2+\lambda+3 & \lambda-5 \\ 3\lambda+1 & \lambda^2-2 \end{pmatrix}.$$

Эта взаимозаменяемость матричных многочленов и многочленных матриц играет существенную роль в математическом аппарате методов факторного и компонентного анализа.

Матричные многочлены одинакового порядка можно складывать, вычитать и умножать аналогично обычным многочленам с числовыми коэффициентами. Следует, однако, помнить, что умножение матричных многочленов, вообще говоря, не коммутативно, т.к. не коммутативно умножение матриц.

Два матричных многочлена называются равными, если равны их коэффициенты, т.е. соответствующие матрицы при одинаковых степенях переменного λ.

Суммой (разностью) двух матричных многочленов $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ называется такой матричный многочлен, у которого коэффициент при каждой степени переменного λ равен сумме (разности) коэффициентов при той же степени λ в многочленах $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$.

Чтобы умножить матричный многочлен $F(\lambda)$ на матричный многочлен $G(\lambda)$, нужно каждый член матричного многочлена $F(\lambda)$ умножить на каждый член матричного многочлена $G(\lambda)$, сложить полученные произведения и привести подобные члены.

Степень матричного многочлена – произведения $F(\lambda)G(\lambda)$ меньше или равна сумме степеней сомножителей.

Операции над матричными многочленами можно осуществлять с помощью операций над соответствующими λ-матрицами.

Чтобы сложить (вычесть) матричные многочлены, достаточно сложить (вычесть) соответствующие λ-матрицы. То же относится к умножению. λ-матрица произведения матричных многочленов равна произведению λ-матриц сомножителей.

Пример.

$$F(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\qquad G(\lambda)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$F(\lambda)G(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\lambda+$$

$$+\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

С другой стороны $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ можно записать в виде

$$F(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&1\\-\lambda&-1\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad G(\lambda)=\begin{pmatrix}1&\lambda\\-1&\lambda\end{pmatrix}$$

$$F(\lambda)G(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-1&\lambda^2+\lambda\\-\lambda+1&-\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Так как умножение матриц не коммутативно, для матричных многочленов определяются два деления с остатком – правое и левое.

Пусть даны два матричных многочлена порядка n

$$F(\lambda)=A_0\lambda^S+A_1\lambda^{S-1}+\ldots+A_S\qquad G(\lambda)=B_0\lambda^t+B_1\lambda^{t-1}+\ldots+B_t$$

где B_0 – невырожденная матрица.

При делении $F(\lambda)$ на $G(\lambda)$ существует однозначно определенное правое частное $Q_1(\lambda)$ и правый остаток $R_1(\lambda)$

$$F(\lambda)=Q_1(\lambda)G(\lambda)+R_1(\lambda),$$

где степень R_1 меньше степени $G(\lambda)$, или $R_1(\lambda)=0$ (деление без остатка), а также левое частное $Q_2(\lambda)$ и левый остаток $R_2(\lambda)$

$$F(\lambda)=G(\lambda)Q_2(\lambda)+R_2(\lambda),$$

где степень $R_2(\lambda)$ меньше степени $G(\lambda)$, или $R_2(\lambda)$=0 (деление без остатка).

Обобщённая теорема Безу. При делении матричного многочлена $F(\lambda)$ на многочлен $(\lambda E - A)$ правый остаток равен правому значению делимого $F(\lambda)$ при $\lambda = A$, т.е. матрице

$$F_{(пр)} = A_0 A^S + A_1 A^{S-1} + ... + A_S = R_1, \tag{3.4.1}$$

а левый остаток – левому значению делимого $F(\lambda)$ при $\lambda = A$, т.е. матрице

$$F_{(лев)} = A^S A_0 + A^{S-1} A_0 + ... + A_S = R_2 \tag{3.4.2}$$

Доказательство. Доказательство справедливости обеих формул (3.4.1) и (3.4.2) осуществляется одинаково, непосредственной подстановкой. Докажем одну из них.

Итак, делимое – $F(\lambda)$, делитель – $G = \lambda E - A$, в качестве частного имеем многочлен

$$Q_2(\lambda) = A_0\lambda^{S-1} + (AA_0 + A_1)\lambda^{S-2} + (A^2A_0 + AA_1 + A_2)\lambda^{S-3} + ... +$$
$$+ (A^{S-1}A_0 + A^{S-2}A_1 + ... + A_{S-1}).$$

Определим произведение $(\lambda E - A)\cdot Q_2(\lambda)$:

$$A_0\lambda^S + (AA_0 + A_1)\lambda^{S-1} + (A^2A_0 + AA_1 + A_2)\lambda^{S-2} + ... +$$
$$+ (A^{S-1}A_0 + A^{S-2}A_1 + ... + A_{S-1})\lambda - AA_0\lambda^{S-1} - (A^2A_0 + AA_1)\lambda^{S-2} -$$
$$- (A^3A_0 + A^2A_1 + AA_2)\lambda^{S-3} - ... - (A^S A_0 + A^{S-1}A_1 + ... + AA_{S-1}) =$$
$$= A_0\lambda^S + A_1\lambda^{S-1} + A_2\lambda^{S-2} + ... + A_S\lambda - (A^S A_0 + A^{S-1}A_1 + ... + AA_{S-1}),$$

т.е. $(A^S A_0 + A^{S-1}A_1 + ... + AA_{S-1}) + F(\lambda) = (\lambda E - A)Q_2(\lambda)$,

или $\quad F(\lambda) = (\lambda E - A)Q_2(\lambda) + (A^S A_0 + A^{S-1}A_1 + ... + AA_{S-1})$,

т.е. $R_2 = A^S A_0 + A^{S-1}A_1 + ... + AA_{S-1}$,

что и требовалось доказать.

Следствие. $F(\lambda)$ делится справа (слева) на многочлен $(\lambda E - A)$ тогда и только тогда, когда $F_{(пр)} = R_1 (F_{(лев)} = R_2)$ равно 0.

Пример. Показать, что матричный многочлен

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & -2 \\ \lambda & 2\lambda + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

делится на матричный многочлен $(\lambda E - A)$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, слева без остатка.

Решение. В самом деле, справедливо равенство

$$F(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + R_1, \text{ где } R_1 = 0$$

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}; Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Подсчитаем значение левого остатка по теореме Безу

$$R_1 = A^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} -21 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. Задания для самостоятельной работы по главе 3

3.1. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

3.2. Найти обратную матрицу порядка n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Найти обратную матрицу порядка n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Найти обратную матрицу порядка n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3.6. Найти обратную матрицу порядка (n+1)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \ldots & a^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7. Найти обратную матрицу порядка n

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{pmatrix}.$$

3.8. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:

а) переставить i-ую и j-ую строки?

б) i-ую строку умножить на число c, не равное нулю?

в) к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на число c, или совершить аналогичное преобразование столбцов?

3.9. Найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ O & E_l \end{pmatrix}$, где E_k и E_l – единичные матрицы соответственно порядков k и l, U – произвольная матрица порядка $k \times l$, а все остальные элементы равны нулю.

3.10. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A+B)' = A' + B'$;

б) $(AB)' = B'A'$;

в) $(cA)' = cA'$;

г) $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}$,

где c – число, а A и B – матрицы.

3.11. Доказать, что если A и B – симметрические квадратные матрицы одинакового порядка, то матрица $C = A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot ... \cdot A \cdot B \cdot A$ является симметрической.

3.12. Показать, что для любой матрицы B матрица $A = B \cdot B'$ является симметрической.

3.13. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется ортогональной, если $A \cdot A' = E$, где E – единичная матрица. Показать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) столбцы A образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_i^j ,$$

где δ_i^j – символ Кронекера, обозначающий 1 при $i=j$ и 0 при $i \neq j$;

б) строки A образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_i^j .$$

3.14. Доказать, что ранг суммы двух матриц не больше суммы их рангов.

3.15. Доказать, что если ранг матрицы A равен r, то минор d, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов этой матрицы, отличен от нуля.

Глава 4. Решение системы линейных уравнений

4.1. Система линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система m алгебраических уравнений первой степени вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &.................................... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

где $x_j, j = \overline{1,n}$ – неизвестные, подлежащие определению;

a_{ij} – числа, называемые коэффициентами при неизвестных;

b_i – числа, называемые свободными членами.

Решением системы уравнений (4.1.1) называется совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ таких, что если в каждое уравнение системы вместо неизвестных подставить эти числа (α_1 вместо x_1, α_2 вместо $x_2, ..., \alpha_n$ вместо x_n), то все уравнения обратятся в тождества.

Если система линейных уравнений (4.1.1) имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. В противном случае система называется несовместной.

Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной, а система, имеющая более одного решения – неопределенной.

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если любое решение каждой из них является одновременно решением и другой системы.

Две произвольные несовместные системы считаются эквивалентными.

Системе линейных уравнений (4.1.1) поставим в соответствие матрицу $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и расширенную матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

полученную присоединением к матрице A столбца свободных членов.

4.2. Методы решения системы n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &.................................... \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Определитель $|A|$ матрицы A называется определителем системы (4.2.1).

Теорема Крамера. Если определитель $|A|$ системы (4.2.1) отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть система (4.2.1) совместна и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – одно из ее решений. Тогда получим *n* тождеств:

$$\begin{aligned} &a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ &a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ &.................................... \\ &a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n = b_n. \end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

Умножим обе части первого из равенств (4.2.2) на алгебраическое дополнение A_{1j}, обе части второго равенства умножим на алгебраическое дополнение A_{2j} и т.д. и обе части *n*-ого равенства – на A_{nj}. Складывая левые и правые части полученных выражений, придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + ... + a_{n1}A_{nj})\alpha_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + ... + a_{n2}A_{nj})\alpha_2 + \\ &+ ... + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj})\alpha_j + ... + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + ... + \\ &+ a_{nn}A_{nj})\alpha_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj} \end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

Коэффициент при α_j равен определителю $|A|$ системы (4.2.1), коэффициент при $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n$ равен нулю, а правая часть равенства (4.2.3) является определителем, полученным из определителя $|A|$ путем замены *j*-го столбца столбцом свободных членов.

Обозначим данный определитель через

$$A_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$$

Тогда равенство (4.2.3) примет вид: $|A|\alpha_j = |A_j|$, откуда

$$\alpha_j = \frac{|A_j|}{|A|}, j = \overline{1,n} \qquad (4.2.4)$$

Из формулы (4.2.4) следует, что если система (4.2.1) совместна, то она обладает единственным решением.

Формулы (4.2.4) называются формулами Крамера.

Непосредственной подстановкой значений $\alpha_j = \frac{|A_j|}{|A|}, j = \overline{1,n}$, во все уравнения системы убедимся в том, что они образуют ее решение:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,|A_j| = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} b_k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\,.$$

При $i = k$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = |A|$; при $i \neq k$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0\,.$

Таким образом, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}b_i\,|A| = b_i, i = \overline{1,n}\,.$$

Теорема доказана.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ &x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{aligned}$$

Решение. Вычислим определитель $|A|, |A_1|, |A_2|, |A_3|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 14 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = -(5-14) = 9,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 2 = 18,$$

откуда $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2.$

Решение системы линейных уравнений с определителем $|A|$, отличным от нуля, можно найти с помощью обратной матрицы. Для этого запишем систему (4.2.1) в виде матричного уравнения

$$AX=B \tag{4.2.5}$$

где $A = (a_{ij})_{n,n}; X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, B = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$.

Решение матричного уравнения (4.2.5) имеет вид

$$X = A^{-1}B \tag{4.2.6}$$

Пример. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Решение. Вычислим для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ее обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Определим неизвестную матрицу-столбец X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

откуда $x_1 = 1/3, x_2 = 1/3, x_3 = 1/3.$

Формулы Крамера (4.2.4) могут быть получены из выражения (4.2.6). Действительно, запишем матричное равенство $X = A^{-1}B$ в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Из полученного выражения непосредственно следуют формулы Крамера:

$$x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k,\ i = \overline{1,n}\cdot$$

4.3. Теорема Кронекера-Карелли

Теорема. Система линейных уравнений (4.1.1) совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть система (4.1.1) совместна и пусть числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – одно из ее решений. Подставляя эти числа вместо неизвестных в систему (4.1.1), получим m тождеств, которые показывают, что последний столбец матрицы $\widetilde{A}$ является линейной комбинацией всех остальных столбцов, взятых соответственно с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Всякий другой столбец матрицы $\widetilde{A}$ входит и в матрицу *A*. Поэтому максимальное число линейно независимых столбцов матриц *A* и $\widetilde{A}$ совпадает. Следовательно, $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Достаточность. Пусть дано, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = r$. Отсюда следует, что максимальное число линейно независимых столбцов матриц *A* и $\widetilde{A}$ совпадает и равно *r*. Для определенности предположим, что первые *r* столбцов матриц *A* и $\widetilde{A}$ линейно независимы, а остальные (*n-r)* столбцов является их линейными комбинациями. Выражая последний столбец матрицы *A* как линейную комбинацию первых *r* столбцов, получим:

$$a_{i1}\cdot\alpha_1 + a_{i2}\cdot\alpha_2 + ... + a_{ir}\cdot\alpha_r = b_i,\ i = \overline{1,m}$$

или

$$a_{i1}\cdot\alpha_1 + a_{i2}\cdot\alpha_2 + ... + a_{ir}\cdot\alpha_r + a_{i,r+1}\cdot 0 + ... + a_{i,n}\cdot 0 = b_i,\ i = \overline{1,m}$$

откуда следует, что числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 0, ..., 0$ являются решением системы (4.1.1), т.е. система (4.1.1) совместна. Теорема доказана.

На основании теоремы Кронекера-Капелли имеем:

1. Если $r(A) \neq r(\widetilde{A})$, то система (4.1.1) несовместна;
2. Если $r(A) = r(\widetilde{A}) = r$, то система (4.1.1) совместна.

Пусть для определенности базисный минор порядка *r* расположен в верхнем левом углу матрицы *A*. Тогда первые *r* строк матрицы *A* линейно независимы, а остальные ее строки являются линейной комбинацией первых *r* строк. Но это означает, что первые *r* уравнений системы (4.1.1) линейно независимы, а остальные (*m-r)* ее уравнений являются их линейными комбинациями. Поэтому достаточно решить систему *r* уравнений; решения такой системы будут, очевидно, удовлетворять и остальным (*m-r)* уравнениям.

При этом возможны два случая:

1. $r = n$. Тогда систему, состоящую из первых r уравнений системы (4.1.1)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$.......................................$$
$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r.$$

можно решить, например, по правилу Крамера. В этом случае система имеет единственное решение, т.е. система совместна и определена;

2. $r < n$. Рассмотрим первые r уравнений системы (4.1.1). Оставив в левых частях первые r неизвестных, перенесем остальные в правые части. Получим систему:

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n,$$
$$a_{21}x_1 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n,$$
$$.......................................$$
$$a_{r1}x_1 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n.$$

Очевидно, что полученная система и, следовательно, система (4.1.1) являются совместными и неопределенными.

Таким образом, если $r(A) = r(\widetilde{A})$, то система (4.1.1) совместна (определенная или неопределенная), если $r(A) < r(\widetilde{A})$, то система (4.1.1) несовместна.

Если в системе n линейных уравнений с n неизвестными определитель системы равен нулю, то $r(A) < n$. Тогда если $r(A) = r(\widetilde{A})$, то система является совместной и неопределенной. Если $r(A) < r(\widetilde{A})$, то система несовместна.

Теорема Кронекера-Капелли устанавливает необходимое и достаточное условие совместности системы (4.1.1), но не дает способа нахождения решения этой системы. Рассмотрим метод Жордана-Гаусса – метод решения системы m линейных уравнений с n неизвестными.

4.4. Метод Жордана-Гаусса

Метод Жордана-Гаусса основан на элементарных преобразованиях (п.3.2) строк расширенной матрицы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

системы (4.1.1).

В результате каждого из элементарных преобразований расширенная матрица изменяется, однако системы линейных уравнений, соответствующие полученным матрицам, эквивалентны исходной системе линейных уравнений.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными. Применяя элементарные преобразования, построим эквивалентную систему специального вида. Для этого выберем в качестве первого уравнений одно из тех уравнений системы, где коэффициент при x_1 отличен от нуля. Не нарушая общности, предположим, что $a_{11} \neq 0$. Тогда первым уравнением системы будет уравнение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \ .$$

Умножим первое уравнение на $\frac{1}{a_{11}}$. Затем умножим это же уравнение на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \mathrm{i} = 2,3,...,\mathrm{m}$, и прибавим его почленно к уравнениям системы с номерами i=2,3,…,m. После этого преобразования в уравнениях с номерами i>1 будет исключено неизвестное x_1. Первый шаг метода Жордана-Гаусса закончен.

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right).$$

Может случиться, что на первом шаге вместе с неизвестными x_1 будут исключены неизвестными $x_2, x_3, ..., x_{j_{k-1}}$ $(j_{k-1} < n)$, но найдется хотя бы одно уравнение, в котором сохранится неизвестное x_{j_k}. Одно из таких уравнений примем в качестве второго уравнения системы. В этом случае расширенная матрица $\widetilde{A}^{(1)}$, соответствующая полученной системе, имеет вид:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1j_k}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{2j_k}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mj_k}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right).$$

Используем второе уравнение для исключения неизвестного x_{j_k} из всех уравнений, кроме второго. После второго шага метода Жордана-Гаусса получим расширенную матрицу

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & 0 & a_{1j_{k+1}}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{2j_{k+1}}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_{21}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{3j_{k+1}}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{mj_{k+1}}^{(2)} & \ldots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array}\right).$$

Продолжая процесс, после r шагов получим матрицу $\widetilde{A}^{(r)}$, содержащую r единичных столбцов на месте первых n столбцов матрицы A (r – ранг матрицы A системы).

При этом возможны три случая:

1. Если $r(A) = r(\widetilde{A}) = n$, то матрица $\widetilde{A}$ преобразуется в матрицу

$$\widetilde{A}^{(n)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Система имеет единственное решение: $x_1 = b_1^{(n)}, x_2 = b_2^{(n)}, ..., x_n = b_n^{(n)}$.

2. Если $r(A) = r(\widetilde{A}) = r$ и $r<n$, то

$$\widetilde{A}^{(r)} = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,r+1}^{(r)} & \ldots & a_{1n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,r+1}^{(r)} & \ldots & a_{2n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{r,r+1}^{(r)} & \ldots & a_{2n}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Система имеет бесконечное множество решений. Общее решение имеет вид:

$$x_1 = b_1^{(r)} - a_{1,r+1}^{(r)} x_{r+1} - \ldots - a_{1n}^{(r)} x_n,$$

$$x_2 = b_2^{(r)} - a_{2,r+1}^{(r)} x_{r+1} - \ldots - a_{2n}^{(r)} x_n,$$

....

$$x_r = b_{r1}^{(r)} - a_{r,r+1}^{(r)} x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(r)} x_n.$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются базисными. $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – свободными неизвестными.

Свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ можно придавать какие угодно значения, получая при этом соответствующие значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$. В результате имеем бесконечное множество частных значений.

Среди частных решений системы выделим базисные решения, которые получают при равенстве нулю всех свободных неизвестных. Очевидно, что одним из базисных решений является следующее:

$$x_1 = b_1^{(r)}, x_2 = b_2^{(r)}, \ldots, x_r = b_r^{(r)}, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

В общем случае число базисных решений не превышает C_n^r.

3. Если $r(A) \neq r(\widetilde{A})$, то

$$\widetilde{A}^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,r+1}^{(r)} & \ldots & a_{1n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,r+1}^{(r)} & \ldots & a_{2n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{r,r+1}^{(r)} & \ldots & a_{2n}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1}^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

где хотя бы один из элементов $b_i^{(r)}, r+1 \le i \le m$ отличен от нуля. В этом случае система (4.1.1) несовместна.

Таким образом, метод Жордана-Гаусса состоит из r итераций (r шагов). На каждой S-ой итерации выбирается направляющий элемент $a_{i_S j_S}^{(S-1)} \neq 0$, где i_S, j_S – соответственно направляющие строка и столбец. С помощью элементарных преобразований столбец j_S преобразуется в единичный с единицей в строке i_S.

Рассмотрим алгоритм произвольной итерации метода Жордана-Гаусса. Положим $J^{(0)} = \{1,2,...,m\}, \widetilde{A}^{(0)} = \widetilde{A}$.

Шаг 1. Сформировать множество $J^{(S)} = J^{(S-1)} \setminus \{i_S\}$.

Шаг 2. Если $J^{(S)} = \varnothing$, то процесс элементарных преобразований закончить. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если для $\forall i \in J^{(S)}$ $a_{ij}^{(S-1)} = 0$, то процесс элементарных преобразований закончить. В противном случае найти направляющий элемент $a_{i_S j_S}^{(S-1)} \neq 0,\ i_S \in J^{(S)}$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Разделить направляющую строку i_S на $a_{i_S j_S}^{(S-1)} \neq 0$.

Шаг 5. К i-ой строке, $i \neq i_S, i = \overline{1,m}$, прибавим строку i_S, умноженную на $-\dfrac{a_{ij_S}^{(S-1)}}{a_{i_S j_S}^{(S-1)}}$.

Покажем, что столбец j_S преобразуется в единичный с единицей в строке i_S. Пусть $j_S = k, i_S = l$. Элементы матрицы $\widetilde{A}^{(S)}$ выражаются через элементы матрицы $\widetilde{A}^{(S-1)}$ следующим образом:

$$a_{lj}^{(S)} = a_{lj}^{(S-1)} / a_{lk}^{(S-1)}, j = \overline{1,n} \tag{4.4.1}$$

$$b_i^{(S)} = b_l^{(S-1)} / a_{lk}^{(S-1)}, \tag{4.4.2}$$

$$a_{ij}^{(S)} = a_{ij}^{(S-1)} - a_{ij}^{(S-1)} \frac{a_{lj}^{(S-1)}}{a_{lk}^{(S-1)}}, i = 1,2,...,l-1,l+1,...,m;\ j = 1,2,...,n \tag{4.4.3}$$

$$b_i^{(S)} = b_i^{(S-1)} - a_{ik}^{(S-1)} \frac{b_l^{(S-1)}}{a_{lk}^{(S-1)}}, i = 1,2,...,l-1,l+1,...,m;\ j = 1,2,...,n \tag{4.4.4}$$

Полагая j=k, из (4.4.1) и (4.4.3) имеем

$$a_{lk}^{(S)} = 1, a_{ik}^{(s)} = 0, i = 1,2,...,l-1,l+1,...,m.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

а) $2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 20,$

$2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40,$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11,$

$3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37.$

Решение. Составим из данной системы расширенную матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right)$$

Полагаем $\widetilde{A}^{(0)} = \widetilde{A},\ J^{(0)} = \{1,2,3,4\}$.

Итерация 1.

Шаг 1. $J^{(1)} = J^{(0)} = \{1,2,3,4\}$.

Шаг 2. $J^{(3)} \neq \varnothing$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим $a_{i_1 j_1}^{(0)} = a_{31}^{(0)} = 1; i_1 = 3, j_1 = 1$.

Шаг 4. Делим третью строку на $a_{31}^{(0)} = 1$.

Шаг 5. К первой, второй и четвертой строкам прибавляем третью строку, соответственно умноженную на -2, -2, -3. В результате матрица $\widetilde{A}^{(0)}$ преобразуется в матрицу

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Итерация 2.

Шаг 1. $J^{(2)} = J^{(1)} \setminus \{3\} = \{1,2,4\}$.

Шаг 2. $J^{(3)} \neq \varnothing$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим $a_{i_2 j_2}^{(1)} = a_{12}^{(0)} = -1; i_2 = 1, j_2 = 2$.

Шаг 4. Делим первую строку на $a_{12}^{(1)} = -1$.

Шаг 5. Ко второй, третьей и четвертой строкам прибавляем первую строку, соответственно умноженную на -4, -3, 1. Получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Итерация 3.

Шаг 1. $J^{(3)} = J^{(2)} \setminus \{1\} = \{2,4\}$.

Шаг 2. $J^{(3)} \neq \varnothing$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим $a_{i_3 j_3}^{(2)} = a_{43}^{(2)} = -1; i_3 = 4, j_3 = 3$.

Шаг 4. Делим четвертую строку на $a_{43}^{(2)} = 3$.

Шаг 5. К первой, второй, третьей строкам прибавляем четвертую строку, соответственно умноженную на 0, -5, -2. Получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Итерация 4.

Шаг 1. $J^{(4)} = J^{(3)} \setminus \{4\} = \{2\}$.

Шаг 2. $J^{(4)} \neq \varnothing$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим $a_{i_4 j_4}^{(3)} = a_{24}^{(3)} = 1; i_4 = 2, j_4 = 4$.

Шаг 4. Делим четвертую строку на $a_{43}^{(2)} = 3$.

Шаг 5. К первой, третьей и четвертой строкам прибавляем вторую строку, соответственно умноженную на -1, 2, 0. Получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Итерация 5.

Шаг 1. $J^{(5)} = J^{(4)} \setminus \{2\} = \varnothing$.

Шаг 2. $J^{(5)} = \varnothing$, поэтому процесс элементарных преобразований закончен. На основании вида матрицы $\widetilde{A}^{(4)}$ получаем единственное решение исходной системы: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 0$.

б) $$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ &x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ &x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{aligned}$$

Решение. Составим расширенную матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) = \widetilde{A}^{(0)}.$$

В результате итерации 1, полагая $a^{(0)}_{i_1 j_1} = a^{(0)}_{11} = 1$, получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right)$$

После итерации 2, полагая $a^{(1)}_{i_2 j_2} = a^{(1)}_{23} = -2$, получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5/2 & 0 & 7/2 & 6 \\ 0 & 3/2 & 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Итерация 3.

Шаг 1. $J^{(3)} = J^{(2)} \setminus \{2\} = \{3,4\}$.

Шаг 2. $J^{(3)} \neq \varnothing$.

Шаг 3. Так как $\forall j = \overline{1,4}, a^{(2)}_{3j} = 0, a^{(2)}_{4j} = 0$, то процесс элементарных преобразований закончен.

Матрица $\widetilde{A}^{(2)}$ определяет общее решение системы:

$x_1 = 6 + 5/2\, x_2 + 7/2 x_4$,

$x_3 = -2 - 3/2 x_2 + 3/2 x_4$,

x_1, x_3 – базисные, x_2, x_4 – свободные переменные.

Получим одно из базисных решений:
$x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = 0$.

в) $2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5,$

$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3,$

$4x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 12x_4 = 2,$

$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2.$

Решение. Матрицы $\widetilde{A}^{(0)}$, $\widetilde{A}^{(1)}$, $\widetilde{A}^{(2)}$ имеют вид:

$$\widetilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 10 & -12 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right);$$

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -4 & 0 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ -16 & 8 & 0 & -2 & -28 \\ 8 & -4 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 10 & -5 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 8 & -4 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Очевидно, что процесс элементарных преобразований следует закончить, так как $a_{1j}^{(2)} = 0; a_{3j}^{(2)} = 0; j = \overline{1,4}$. Из первой (или третьей) строки матрицы $\widetilde{A}^{(2)}$ следует, что исходная система линейных уравнений несовместна. Действительно, первой строке соответствует уравнение $0x_x + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6$, которое не может быть удовлетворено ни при каких значениях неизвестных $x_x; x_2; x_3; x_4$.

Используя метод Жордана-Гаусса, рассмотрим еще один метод вычисления обратной матрицы A^{-1}.

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = E, \tag{4.4.5}$$

где $A = (a_{ij})_{n,n}, |A| \neq 0, X = (x_{ij})_{n,n}$, E – единичная матрица.

Очевидно, что матричное уравнение (4.4.5) имеет единственное решение $X = A^{-1}$.

Решение матричного уравнения (4.4.5) сводится к решению *n* систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными вида

$$a_{i1}x_{1j} + a_{i2}x_{2j} + \ldots + a_{in}x_{nj} = e_{ij}; i, j = \overline{1,n}, \tag{4.4.6}$$

$$\text{где } e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если i = j}, \\ 0, & \text{если i} \neq \text{j}. \end{cases}$$

Системе линейных уравнений (4.4.6) соответствует расширенная матрица $\widetilde{C}^{(0)} = \left(A|E\right)$. Применяя к матрице $\widetilde{C}^{(0)}$ алгоритм метода Жордана-Гаусса, получим матрицу $\widetilde{C}^{(n)} = (E|B)$. Покажем, что $B = A^{-1}$. Расширенной матрице $\widetilde{C}^{(n)}$ соответствует матричное уравнение $EX = B$, которое имеет единственное решение X=B. Матрица $\widetilde{C}^{(n)} = (E|B)$ получена из матрицы $\widetilde{C}^{(0)} = (A|E)$ методом Жордана-Гаусса. Поэтому системы линейных уравнений, соответствующие матрицам $(E|B)$ и $(A|E)$, равносильны, т.е. имеют одно и то же решение. Отсюда следует, что $B = A^{-1}$, следовательно, $\widetilde{C}^{(n)} = (E|A^{-1})$.

Таким образом, чтобы для невырожденной матрицы А вычислить обратную матрицу A^{-1}, необходимо составить матрицу $\widetilde{C}^{(0)} = (A|E)$. Методом Жордана-Гаусса в матрице $\widetilde{C}^{(0)}$ преобразовать матрицу A к виду единичной матрицы E, тогда на месте единичной матрицы E получим обратную матрицу A^{-1}.

Пример. Вычислить обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу

$$\widetilde{C}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

На итерации 1, полагая $a_{i_1 j_1}^{(0)} = a_{11}^{(0)} = 1$, получим

$$\widetilde{C}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

На итерации 2, полагая $a_{i_2 j_2}^{(1)} = a_{22}^{(1)} = 9$, получим

$$\widetilde{C}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

На итерации 3, полагая $a_{i_3 j_3}^{(2)} = a_{33}^{(2)} = 4$, получим

$$\widetilde{C}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/9 & 1/9 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \end{array}\right),$$

откуда $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ 7/9 & 1/9 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$

4.5. Однородные системы линейных уравнений

Однородной называется система линейных уравнений, свободные члены которой равны нулю:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Очевидно, что система однородных уравнений (4.5.1) всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$.

Это следует также из теоремы Кронекера-Капелли: в случае однородной системы $r(A) = r(\widetilde{A})$.

При решении системы однородных уравнений можно поставить вопрос: при каком условии однородная система (4.5.1) является неопределенной, т.е. имеет ненулевые решения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы система (4.5.1) имеет ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $r(A) < n$.

Действительно, если $r(A) = n$, то система имеет единственное и, значит, только нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$. Если $r(A) < n$, то система (4.5.1) является неопределенной (несовместной она быть не может) и, значит, имеет бесчисленное множество решений.

Пусть $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ – какое-нибудь ненулевое решение однородной системы (4.5.1). Представим это решение как вектор-строку $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Тогда $\lambda_1\overline{\alpha} = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_1\alpha_2, ..., \lambda_1\alpha_n)$ тоже, очевидно, будет решением системы (4.5.1). Далее, если $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ какое-то другое решение системы (4.5.1), отличное от $\overline{\alpha}$, то при любых λ_1 и λ_2 линейная комбинация $\lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\beta} = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_2, \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2, ..., \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n)$ данных решений тоже будет решением системы, так как если

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = 0,$$

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n = 0,$$

то и

$$a_{i1}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1) + a_{i2}(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2) + ... + a_{in}(\lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n) = 0$$

Итак, любая линейная комбинация решений однородной системы (4.5.1) тоже будет ее решением.

Определение. Линейно независимая система решений $\overline{u_1}, \overline{u_2}, ..., \overline{u_k}, k = n - r(A)$ системы (4.5.1) называется фундаментальной, если каждое решение системы (4.5.1) является линейной комбинацией решений $\overline{u_1}, \overline{u_2}, ..., \overline{u_k}$.

Теорема. Если $r(A) < n$, то система (4.5.1) обладает фундаментальными системами решений.

Доказательство. Пусть $r(A) = n$, *r*<*n* и пусть для определенности базисный минор порядка *r* стоит в верхнем левом углу матрицы *A*. Отсюда следует, что первые *r* уравнений системы (4.5.1) линейно независимы. Перенеся свободные неизвестные $x_{r+1}, ..., x_n$ первых *r* уравнений системы (4.6.1) в правые части, получим систему

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Придавая свободным неизвестным значения $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$, получим соответствующие значения $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_r = \alpha_r$ первых r неизвестных. Аналогично, придавая свободным неизвестным значения $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \ldots, x_n = 0$, получим: $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \ldots, x_r = \beta_r$ и т.д. В результате будет найдено k=n-r решений системы (4.5.1):

$$\begin{aligned} &\bar{u}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\bar{u}_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\bar{u}_k = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Решения $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}$ линейно независимы, т.к. ранг образованной ими матрицы равен К.

Покажем теперь, что каждое решение системы (4.5.1) линейно выражаются через $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}$. Пусть $\bar{u} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r, \theta_{r+1}, \ldots, \theta_n)$ – произвольное решение системы (4.5.1). Составим новое решение $\overline{u_0}$ как следующую линейную комбинацию решений $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}$:

$$\overline{u_0} = \bar{u} - \theta_{r+1}\bar{u}_1 - \theta_{r+2}\bar{u}_2 - \ldots - \theta_n \bar{u}_k$$

Очевидно, что все элементы, начиная с k-ого элемента, в решении $\overline{u_0}$ равны нулю, то из однородной системы (4.5.2), определитель которого отличен от нуля, получаем, что и значения всех остальных неизвестных в $\overline{u_0}$ должны быть равны нулю, т.е. $\overline{u_0} = (0, 0, \ldots, 0)$ и тогда $\bar{u} = \theta_{r+1}\bar{u}_1 + \ldots + \theta_n \bar{u}_k$, т.е. произвольное решение $\bar{u}$ является линейной комбинацией линейно независимых решений $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}$. Теорема доказана.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

и соответствующую ей систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Пусть $\bar{u}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – какое-то решение системы (4.5.3) и $\bar{u}_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ любое другое ее решение, отличное от $\overline{u_1}$. Очевидно, что разность

$$\overline{u_1} - \overline{u_2} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$$

будет решением системы (4.5.4), и если $\bar{u}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ – произвольное решение однородной системы (4.5.4), то очевидно, что

$$\overline{u_1}+\overline{u_3}=(\alpha_1+\gamma_1,\alpha_2+\gamma_2,...,\alpha_n+\gamma_n)$$

является решением системы (4.5.3). Отсюда следует, что все решения системы (4.5.3) можно получить, прибавляя к одному какому-нибудь ее решению всевозможные решения однородной системы (4.5.4).

Таким образом, общее решение системы (4.5.3) равно линейной комбинации общего решения однородной системы (4.5.4) и произвольного, но фиксированного решения системы (4.5.3). Если $\overline{u_1},\overline{u_2},...,\overline{u_k}$ фундаментальная система решений однородной системы (4.5.4) и $\overline{u_0}$ – произвольное фиксированное решение системы (4.5.3), то общее решение системы (4.5.3) имеет вид $\bar{u}=\bar{u}_0+\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+...+\lambda_\kappa\bar{u}_k$, где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\kappa$ – произвольные числа.

Пример. Найти фундаментальную систему однородной системы уравнений

$$-2x_1+2x_2+5x_3+x_4=0,$$

$$9x_1-39x_2+2x_3+5x_4=0.$$

Решение. Решаем систему методом Жордана-Гаусса:

$$\tilde{A}^{(0)}=\left(\begin{array}{cccc|c}-2 & 2 & 5 & 1 & 0\\ 9 & -39 & 3 & 5 & 0\end{array}\right);\ \tilde{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{cccc|c}-2 & 2 & 5 & 1 & 0\\ 19 & -49 & -23 & 0 & 0\end{array}\right);$$

$$\tilde{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -60/19 & 49/19 & 1 & 0\\ 1 & -49/19 & -23/19 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Общее решение имеет вид: $\begin{array}{l}x_1=49/19x_2+23/19x_3\\ x_4=60/19x_2+9/19x_3\end{array}$.

Решение $\overline{u_1}$ получим, придавая свободным неизвестным значения $x_2=1,x_3=0$:

$$\overline{u_1}=(\frac{49}{19},1,0,\frac{60}{19}),$$

и решение $\overline{u_2}$ получим, полагая $x_2=0,x_3=1$:

$$\overline{u_2}=(\frac{23}{19},0,1,-\frac{49}{19}).$$

Таким образом, одна из фундаментальных систем решений имеет вид:

$$\overline{u_1}=(\frac{49}{19},1,0,\frac{60}{19}),\ \overline{u_2}=(\frac{23}{19},0,1,-\frac{49}{19}).$$

Общее решение системы можно представить в следующем виде:

$$\bar{u}=\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2=(\frac{49}{19}\lambda_1+\frac{29}{19}\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2,\frac{60}{19}\lambda_1-\frac{49}{19}\lambda_2),$$

где λ_1,λ_2 – произвольные числа. Например, полагая $\lambda_1=19$ и $\lambda_2=19$, получим одно из частных решений: $x_1=72,x_2=19,x_3=19,x_4=11$.

4.6. Задания для самостоятельной работы по главе 4

4.1. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{aligned}
&2x_1+2x_2-x_3+x_4=4\\
&4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\\
&8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\
&3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6
\end{aligned}$$

4.2. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{aligned}
&2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2\\
&x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\
&2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3\\
&x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3
\end{aligned}$$

4.3. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{aligned}
&2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20\\
&x_1+3x_2+2x_3+x_4=11\\
&2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40\\
&3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37
\end{aligned}$$

4.4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{aligned}
&3x_1+4x_2+x_3+x_4+3=0\\
&3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6=0\\
&6x_1+8x_2+x_3+2x_4+8=0\\
&3x_1+5x_2+32x_3+4x_4+8=0
\end{aligned}$$

4.5. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{aligned}
&7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2=0\\
&2x_1-2x_2+x_3+x_4-6=0\\
&5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3=0\\
&2x_1+3x_2+x_3+x_4=0
\end{aligned}$$

4.6. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2-6x_3-4x_4=6\\
&3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2\\
&2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6\\
&3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7
\end{aligned}$$

4.7. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{aligned}
&2x_1-3x_2+3x_3+2x_4-3=0\\
&6x_1+9x_2-2x_3-x_4+4=0\\
&10x_1+3x_2-3x_3-2x_4-3=0\\
&8x_1+6x_2+x_3+3x_4+7=0
\end{aligned}$$

4.8. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79\\
&3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263\\
&2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146\\
&x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92
\end{aligned}$$

4.9. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15\\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35\\
&x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70\\
&x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126\\
&x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210
\end{aligned}$$

4.10. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2\\
&2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 35\\
&3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17\\
&2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57\\
&x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7
\end{aligned}$$

4.11. Исследовать совместимость и найти общее и одно базисное решение системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5\\
&6x_1 - 3x_2 + x_3 - 14x_4 = 7\\
&4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18
\end{aligned}$$

4.12. Исследовать совместимость и найти общее и одно базисное решение системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1\\
&2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2\\
&3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1\\
&2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2
\end{aligned}$$

4.13. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ.

$$\begin{aligned}
&(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda\\
&x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2\\
&x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3
\end{aligned}$$

4.14. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений.

Глава 5. Векторные пространства

5.1. Понятие векторного пространства

Определение. Множество R элементов $\overline{x},\overline{y},\overline{z},...$ называется векторным или линейным пространством, если:

1. Любой паре элементов $\overline{x}\in R$ и $\overline{y}\in R$ однозначно ставится в соответствие элемент $\overline{z}\in R$, называемый суммой $\overline{x}$ и $\overline{y}$ и обозначаемый $\overline{z}=\overline{x}+\overline{y}$;

2. Каждому элементу $\overline{x}\in R$ и любому числу α ставится в соответствие элемент $\overline{z}\in R$, называемый произведением элемента $\overline{x}$ на число α и обозначаемый $\overline{z}=\alpha\overline{x}$;

3. Введение операций сложения элементов и умножения элементов на число удовлетворяют следующим аксиомам:

I. $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$;

II. $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$, для любых $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in R$;

III. существует такой нулевой элемент $\overline{0}\in R$, что $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$, для любого $\overline{x}\in R$;

IV. для каждого элемента $\overline{x}\in R$ существует такой элемент $(-\overline{x})$ (называемый противоположным к $\overline{x}$), что $\overline{x}+(-\overline{x})=\overline{0}$;

V. $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$;

VI. $\alpha(\beta\overline{x})=(\alpha\beta)\overline{x}$, для любого $\overline{x}\in R$ и любых чисел α,β;

VII. $(\alpha+\beta)\overline{x}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{x}$, для любого $\overline{x}\in R$ и любых чисел α,β;

VIII. $\alpha(\overline{x}+\overline{y})=\alpha\overline{x}+\alpha\overline{y}$, для любых $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из R и любого числа α;

Элементы векторного пространства называются векторами. Если в пространстве R определено умножение его элементов на вещественные числа, то R называется вещественным векторным пространством. Если элементы из R можно умножать на комплексные числа, то R называется комплексным векторным пространством. Из аксиом I – VIII непосредственно вытекают следующие свойства векторного пространства:

1. Единственность нулевого вектора. Предположим, что в пространстве R имеются два нулевых вектора $\overline{0}_1$ и $\overline{0}_2$. Тогда, так как для любого $\overline{x}\in R$ имеем $\overline{x}+\overline{0}_1=\overline{x}$ и $\overline{x}+\overline{0}_2=\overline{x}$, то, в частности, полагая $\overline{x}=\overline{0}_2$, получаем $\overline{0}_2+\overline{0}_1=\overline{0}_2$ и, полагая $\overline{x}=\overline{0}_1$, получаем $\overline{0}_1+\overline{0}_2=\overline{0}_1$. Ввиду равенства $\overline{0}_1+\overline{0}_2=\overline{0}_2+\overline{0}_1$ получаем $\overline{0}_1=\overline{0}_2$.

2. Единственность противоположного вектора. Предположим, что у вектора $\overline{x}$ имеются два противоположных вектора $\overline{x}'$ и $\overline{x}''$. Тогда $\overline{x}+\overline{x}'=\overline{0}$ и $\overline{x}+\overline{x}''=\overline{0}$. Следовательно, $\overline{x}'+\overline{x}+\overline{x}''=\overline{x}'+(\overline{x}+\overline{x}'')=\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}'$, и $\overline{x}'+\overline{x}+\overline{x}''=(\overline{x}'+\overline{x})+\overline{x}''=\overline{0}+\overline{x}''=\overline{x}''$, откуда $\overline{x}'=\overline{x}''$.

3. Для каждого вектора $\overline{x}\in R$ $0\cdot\overline{x}=\overline{0}$. Действительно, для каждого $\overline{x}$ имеем $0\cdot\overline{x}=(0+0)\overline{x}=0\cdot\overline{x}+0\cdot\overline{x}$. Прибавляя к левой и правой частям последнего равенства $(-0\cdot\overline{x})$, получим $0\cdot\overline{x}-0\cdot\overline{x}=0\cdot\overline{x}+0\cdot\overline{x}-0\cdot\overline{x}$, или $\overline{0}=0\cdot\overline{x}$.

4. Для любого числа α и $\overline{0}\in R$ $\alpha\overline{0}=\overline{0}$. Действительно, $\alpha\overline{0}=\alpha(\overline{0}+\overline{0})=\alpha\overline{0}+\alpha\overline{0}$. Прибавляя к левой и правой частям равенства $(-\alpha\overline{0})$, получим $\overline{0}=\alpha\overline{0}$.

5. Если произведение $\alpha\overline{x}=\overline{0}$, то либо $\alpha=0$, либо $\overline{x}=\overline{0}$. В самом деле, пусть $\alpha\neq 0$, тогда $\overline{x}=1\cdot\overline{x}=\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)\overline{x}=\frac{1}{\alpha}(\alpha\overline{x})=\frac{1}{\alpha}\overline{0}=\overline{0}\cdot$

Приведем следующие примеры некоторых векторных пространств.

1. Множество всех вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Данное множество является векторным пространством, если числовой множитель является элементом множества рациональных или вещественных чисел. Если числовой множитель есть элемент множества комплексных чисел, то данное множество не образует векторного пространства, так как произведение действительного числа на комплексное число в общем случае есть комплексное число.

2. Множество всех рациональных чисел образует здесь векторное пространство, если числовой множитель есть рациональное число. Если числовой множитель является вещественным или комплексным числом, то это множество векторного пространства не образует.

3. Рассмотрим множество элементов, каждый из которых является упорядоченной последовательностью из действительных чисел. Элементы этого множества будем называть векторами и обозначать

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Операции сложения векторов и умножения вектора на число вводятся следующим образом:

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \cdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \cdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Введенные операции удовлетворяют всем аксиомам I – VIII векторного пространства. Значит, это множество является векторным пространством, которое обозначим R_n. Очевидно, что нулевой вектор из R_n имеет вид: $\bar{0} = (0,0,...,0)^T$.

4. Множество всех многочленов степени, не превосходящей n, с обычными для многочленов операциями сложения и умножения на число. В этом пространстве вектор $\bar{x}$ имеет вид: $\bar{x} = A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + ... + A_n$, где $A_0, A_1, ..., A_n$ – произвольные числа, t – переменная. Данное множество является векторным пространством.

Пусть множество R образует некоторое векторное пространство. Тогда всякое подмножество R_1 множества R, элементы которого также образуют векторное пространство с теми же самыми операциями сложения и умножения на число, что и в R, называется подпространством векторного пространства R. Для того чтобы подмножество R_1 множества R было подпространством векторного пространства, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) если $\bar{x} \in R_1$ и $\bar{y} \in R_1$, то $\bar{x} + \bar{y} \in R_1$

2) если $\bar{x} \in R_1$ и λ – любое число, то $\lambda\bar{x} \in R_1$.

Необходимость следует из того, что эти условия должны выполняться для любого векторного пространства.

Для доказательства достаточности надо показать, что выполняются все восемь аксиом векторного пространства.

Справедливость аксиом I, II, V – VIII очевидна. Докажем выполняемость аксиомы III. Так как по условию, если $\overline{x} \in R_1$, то $\lambda\overline{x} \in R_1$ при любом λ, то, полагая λ =0, получим $0 \cdot \overline{x} = \overline{0} \in R_1$. Но $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x} \in R_1$ и, следовательно, аксиома III верна. Для доказательства аксиомы IV положим $\lambda = -1$. Так как $\overline{x} \in R_1$, то $(-1)\overline{x} \in R_1$, а $(-1)\overline{x}$ есть вектор, противоположный вектору $\overline{x}$. Следовательно, подмножество R_1 вместе с вектором $\overline{x}$ содержит и противоположный ему элемент, что и доказывает выполнимость аксиомы IV.

5.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Важную роль в дальнейшем изложении будет играть понятие линейной зависимости и независимости векторов.

Определение. Пусть R – векторное пространство. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0} \qquad (5.2.1)$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми называются линейно независимыми. Другими словами, векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называются линейно независимыми, если равенство (5.2.1) выполняется, тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$.

Пусть векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ линейно зависимы, т.е. пусть в соотношении (5.2.1) хотя бы один из коэффициентов, например, λ_1 отличен от нуля. Тогда

$$\lambda_1\overline{a}_1 = -\lambda_2\overline{a}_2 - \lambda_3\overline{a}_3 - ... - \lambda_k\overline{a}_k$$

и, разделив на $\lambda_1 \neq 0$ и положив

$$\alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \alpha_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_1},$$

получим

$$\overline{a}_1 = \alpha_2\overline{a}_2 + \alpha_3\overline{a}_3 + ... + \alpha_k\overline{a}_k \qquad (5.2.2)$$

Если вектор $\overline{a}_1$ выражается через векторы $\overline{a}_2, \overline{a}_3, ..., \overline{a}_k$ в виде (5.2.2), то говорят, что $\overline{a}_1$ есть линейная комбинации векторов $\overline{a}_2, \overline{a}_3, ..., \overline{a}_k$.

Таким образом, если векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. Верно и обратное утверждение: векторы, один из которых есть линейная комбинация остальных, линейно зависимы. На прямой любые два вектора пропорциональны, т.е. линейно зависимы. На плоскости можно найти два линейно независимых вектора, но всякие три вектора линейно зависимы. Если R – совокупность векторов трехмерного пространства, то три линейно независимых вектора в R можно найти, но всякие четыре вектора линейно зависимы. Из приведенных примеров мы видим, что максимальное число линейно независимых векторов на прямой, плоскости, в трехмерном пространстве совпадает с тем, что в аналитической геометрии принято называть размерностью прямой, плоскости, пространства.

Введем определение размерности векторного пространства.

Определение. Векторное пространство R называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, но больше чем n линейно независимых векторов оно не содержит. Векторное пространство размерности n обозначается R_n.

Если в пространстве R можно найти любое число линейно независимых векторов, то R называется бесконечномерным. Бесконечномерные пространства составляют предмет специального изучения. В линейной алгебре изучаются только конечномерные пространства.

5.3. Базис векторного пространства

Определение. Совокупность n линейно независимых векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ пространства R_n называется его базисом. Согласно определению n мерного векторного пространства R_n в нем существует n линейно независимых векторов, т.е. существует базис.

Теорема. Каждый вектор $\overline{x}$ векторного пространства можно представить, и притом единственным образом как линейную комбинацию векторов базиса.

Доказательство. Пусть, векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ образуют базис в R_n. Присоединим к ним произвольный вектор $\overline{y}$ из R_n. Так как каждая система из ($n+1$) векторов пространства R_n линейно зависима, то линейно зависима и система $\overline{x}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, т.е. существуют такие не равные одновременно нулю числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ что

$$\lambda_0 \overline{x} + \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + ... + \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0} \qquad (5.3.1)$$

При этом $\lambda_0 \neq 0$, так как иначе из формулы (5.3.1) следовала бы линейная зависимость векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Выражая из (5.3.1) вектор $\overline{x}$, получим

$$\overline{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\overline{a}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\overline{a}_n$$

Полагая $x_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}$, $i = \overline{1, n}$, будем иметь

$$\overline{x} = x_1 \overline{a}_1 + x_2 \overline{a}_2 + ... + x_n \overline{a}_n$$

Данное представление вектора $\overline{x}$ через векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ единственно, так как если $\overline{x} = x_1' \overline{a}_1 + ... + x_n' \overline{a}_n$ и $\overline{x} = x_1'' \overline{a}_1 + ... + x_n'' \overline{a}_n$, то $(x_1' - x_1'')\overline{a}_1 + ... + (x_n' - x_n'')\overline{a}_n = \overline{0}$. Ввиду линейной независимости векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, $x_1' - x_1'' = 0, ..., x_n' - x_n'' = 0$, откуда $x_1' = x_1'', ..., x_n' = x_n''$.

Таким образом, если в n-мерном векторном пространстве R_n задан базис $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, то, используя выражение $\overline{x} = x_1 \overline{a}_1 + ... + x_n \overline{a}_n$ можно установить взаимно однозначное соответствие между векторами этого пространства и упорядоченными последовательностями из n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ будем называть координатами вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ и будем писать $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Из приведенной теоремы следует, что два вектора $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{a}_i$ и $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{a}_i$ в R_n равны тогда и только тогда, когда их координаты в базисе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ равны, т.е. когда $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$.

Рассмотрим действия над векторами в координатной форме.

Пусть в пространстве R_n задан базис $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Так как любой вектор из R_n можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е.

$$\overline{x} = x_1 \overline{a}_1 + x_2 \overline{a}_2 + ... + x_n \overline{a}_n$$
$$\overline{y} = y_1 \overline{a}_1 + y_2 \overline{a}_2 + ... + y_n \overline{a}_n,$$

то на основании аксиом, которым удовлетворяют операции сложения и умножения на число, имеем

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 \overline{a}_1 + ... + x_n \overline{a}_n) + (y_1 \overline{a}_1 + ... + y_n \overline{a}_n) = (x_1 + y_1)\overline{a}_1 + ... + (x_n + y_n)\overline{a}_n,$$
$$\lambda \overline{x} = \lambda(x_1 \overline{a}_1 + x_2 \overline{a}_2 + ... + x_n \overline{a}_n) = \lambda x_1 \overline{a}_1 + \lambda x_2 \overline{a}_2 + ... + \lambda x_n \overline{a}_n.$$

Отсюда следует, что если векторы пространства R_n, заданы своими координатами относительно некоторого базиса $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, то при сложении векторов или умножении их на число λ координаты векторов соответственно складываются или умножаются на λ. Таким образом,

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)^T,$$
$$\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)^T$$

и если

$$\overline{y} = \lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + ... + \lambda_n\overline{x}_n$$

где

$$\overline{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}),$$
$$\overline{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}),$$
$$\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

то

$$y_1 = \lambda_1 x_{11} + \lambda_2\overline{x}_{21} + ... + \lambda_m x_{m1},$$
$$y_2 = \lambda_1 x_{12} + \lambda_2\overline{x}_{22} + ... + \lambda_m x_{m2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = \lambda_1 x_{1n} + \lambda_2\overline{x}_{2n} + ... + \lambda_m x_{mn}.$$

У нулевого вектора $\overline{0}$ все координата равны нулю, так как из равенства $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$ ввиду линейной независимости векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Вектор, противоположный к $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ равен $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)^T$ так как $(x_1, x_2, ..., x_n)^T + (-x_1, -x_2, ..., -x_n)^T = (0,0,...,0)^T = \overline{0}$.

Примеры.

1. Для случая трехмерного пространства R_3 определение координат вектора совпадает с имеющимся в аналитической геометрии определением координат вектора в некоторой системе координат.

2. Пусть R_n – пространство, векторами которого являются упорядоченные системы $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ из n чисел.

Очевидно, что n векторов

$$\overline{e}_1 = (1,0,.....,0)^T,$$
$$\overline{e}_2 = (0,1,.....,0)^T,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{e}_n = (0,0,.....,1)^T,$$

образуют базис этого пространства. Найдем координаты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ вектора $\overline{x}$ в этом базисе:

$$\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1(1,0,...,0) + \alpha_2(0,1,...,0) + ... + \alpha_n(0,0,...,1) =$$
$$= \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e}_n$$

Отсюда следует, что числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ можно рассматривать как координаты вектора $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ пространства R_n.

3. R_n – пространство, векторами которого являются многочлены степени меньшей либо равной $(n-1)$. Простейшим базисом является совокупность векторов $e_1 = 1, e_2 = t, e_n = t^{n-1}$. Тогда координатами многочлена $P(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + ... + a_{n-1}$ в этом базисе являются его коэффициенты $a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_1, a_0$. Выберем другой базис: $e_1^{'} = 1, e_2^{'} = t - a, e_3^{'} = (t-a)^2, ..., e_n^{'} = (t-a)^{n-1}$. Каждый многочлен по формуле Тейлора может быть представлен в виде $P(t) = P(a) + P'(a)(t-a) + \frac{1}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-1}$. Таким образом, в этом базисе *P(t)* имеет координаты $P(a), P'(a), ... \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$.

5.4. Изоморфизм векторных пространств

Определение. Векторные пространства *R* и *R'* называются изоморфными, если между их векторами-элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если $\bar{x} \leftrightarrow \bar{x}'$ и $\bar{y} \leftrightarrow \bar{y}'$, где $\bar{x}, \bar{y} \in R$, $\bar{x}', \bar{y}' \in R'$, то $\bar{x} + \bar{y} \leftrightarrow \bar{x}' + \bar{y}'$ и $\lambda\bar{x} \leftrightarrow \lambda\bar{x}'$.

Из определения изоморфизма следует, что если $\bar{x}, \bar{y}, ...$ – векторы из *R*, а $\bar{x}', \bar{y}', ...$ – вектора из *R*′, то равенство $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + ... = \bar{0}$ равносильно равенству $\alpha\bar{x}' + \beta\bar{y}' + ... = \bar{0}'$. Следовательно, линейно независимым векторам из *R* соответствуют линейно независимые векторы из *R*′ и обратно.

Пространства различной размерности не могут быть между собой изоморфны. В самом деле, пусть *R* и *R*′ изоморфны. Тогда максимальное число линейно независимых векторов в *R* и *R*′ одно и то же, т.е. размерности пространств *R* и *R*′ равны.

Все пространства, имеющие одну и ту же размерность *n*, изоморфны между собой.

5.5. Преобразование координат при изменении базиса

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n'$ – два базиса пространства R_n. Каждый вектор $\bar{e}_i', i = \overline{1,n}$ можно выразить через векторы $\bar{e}_i, i = \overline{1,n}$:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1' &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + ... + a_{n1}\bar{e}_n, \\ \bar{e}_2' &= a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + ... + a_{n2}\bar{e}_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n' &= a_{1n}\bar{e}_1 + a_{1n}\bar{e}_2 + ... + a_{nn}\bar{e}_n \end{aligned} \qquad (5.5.1)$$

Выражения (5.5.1) показывают, что новые базисные векторы $\bar{e}_i'$ получаются из старых базисных векторов $\bar{e}_i$ с помощью матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} \end{pmatrix},$$

причем коэффициенты их разложений по старым базисным векторам образуют столбцы этой матрица.

Матрица *A* называется матрицей перехода от базиса $\bar{e}_i$ к базису $\bar{e}_i'$.

Определитель матрицы A отличен от нуля, так как в противном случае ее столбцы, а следовательно, и векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$ были бы линейно зависимы.

Рассмотрим, как связаны между собой координаты одного и того же вектора $\bar{x}$ в старом и новом базисах. Пусть

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n \tag{5.5.2}$$

и в то же время

$$\bar{x} = x'_1\bar{e}'_1 + x'_2\bar{e}'_2 + ... + x'_n\bar{e}'_n \tag{5.5.3}$$

Подставим в (5.5.3) вместо $\bar{e}'_i$ их выражения из (5.5.1):

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j \tag{5.5.4}$$

Из (5.5.2) и (5.5.4) в силу единственности разложения вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ получаем

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j,\ i = \overline{1,n},$$

или в матричном виде

$$X=AX', \tag{5.5.5}$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $X' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)^T$.

Уравнение (5.5.5.) показывает связь между координатами x_j и x'_j вектора $\bar{x}$ в базисах $\bar{e}_i$ и $\bar{e}'_i$, $i = \overline{1,n}$.

Из (5.5.5.) получаем:

$$X'=A^{-1}X$$

Таким образом, при переходе от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ к базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$ координаты вектора $\bar{x}$ преобразуются с помощью матрицы A^{-1}, являющейся обратной к транспонированной матрице, задающей преобразование базисов.

Пример. В базисе $\bar{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)^T$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)^T$ пространства R_3 заданы векторы $\bar{a}_1 = (1,2,-1)^T$, $\bar{a}_2 = (3,1,2)^T$, $\bar{a}_3 = (2,4,0)^T$, $\bar{b} = (0,-5,5)^T$. Показать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образует базис. Найти координаты вектора $\bar{b}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Выразить связь между базисами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

Решение. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис пространства R_3, если они линейно независимы. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно независимы если векторное равенство $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_1 + \lambda_3\bar{a}_3 = \bar{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Найдем решение векторного равенства

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

методом Жордана-Гаусса.

$$\widetilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c}(1) & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad \widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & (5) & 0 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \end{array}\right) \qquad \widetilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ линейно независима и, следовательно, образует базис в R_3.

Выразим каждый вектор $\overline{a}_i$ через векторы $\overline{e}_i$:

$$\overline{a}_1 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 - \overline{e}_3$$
$$\overline{a}_2 = 3\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$$
$$\overline{a}_3 = 2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$$

Матрица A перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ к базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислив

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

определим координаты (x_1, x_2, x_3) вектора $\overline{x}$ в новом базисе

$$x' = A^{-1}\overline{b} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в базисе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ вектор $\overline{b}$ определяется координатами $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 0$.

Связь между базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ и базисом $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ определяется из следующих соотношений:

$$\overline{e}_1 = x_{11}\overline{a}_1 + x_{21}\overline{a}_2 + x_{31}\overline{a}_3,$$
$$\overline{e}_2 = x_{12}\overline{a}_1 + x_{22}\overline{a}_2 + x_{32}\overline{a}_3,$$
$$\overline{e}_3 = x_{13}\overline{a}_1 + x_{23}\overline{a}_2 + x_{33}\overline{a}_3,$$

или в матричном виде:

$$E=XA,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение данного матричного уравнения имеет вид $X=A^{-1}$, откуда получаем

$$\bar{e}_1 = \frac{4}{5}\bar{a}_1 + \frac{2}{5}\bar{a}_2 - \frac{1}{2}\bar{a}_3,$$

$$\bar{e}_2 = -\frac{2}{5}\bar{a}_1 - \frac{1}{5}\bar{a}_2 + \frac{1}{2}\bar{a}_3,$$

$$\bar{e}_3 = -\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_3,$$

Данные соотношения выражают связь между базисами.

5.6. Евклидово пространство

n-мерное векторное пространство E_n называется евклидовым, если каждой паре векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из E поставлено в соответствие вещественное число $(\bar{x}, \bar{y})$, называемое скалярным произведением, при чем это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

I. Линейности по первому аргументу

$$(c_1\bar{x} + c_2\bar{y}, \bar{z}) = c_1(\bar{x}, \bar{z}) + c_2(\bar{y}, \bar{z});$$

II. Симметрии

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{z});$$

III. Положительной определенности

$$(\bar{x}, \bar{x}) > 0, \text{ при } \bar{x} \neq 0$$

и $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{x} = 0$.

Из линейности по первому аргументу и симметрии следует и линейность по второму аргументу

$$(\bar{x}, c_1\bar{y} + c_2\bar{z}) = c_1(\bar{x}, \bar{y}) + c_2(\bar{x}, \bar{z})$$

Примеры.

1. Векторами пространства E_n является любая упорядоченная система n действительных чисел $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Сложение векторов и умножение их на число определены в п.5.1, а скалярное произведение векторов $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ и $\bar{y} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)^T$ определим формулой $(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_n$.

Легко убедиться в том, что аксиомы I-III действительно выполняются.

2. Рассмотрим более общий случай. Вектор $\bar{x} \in E_n$ по-прежнему определим как упорядоченную совокупность n действительных чисел. Сложение векторов и умножение их на число определим так же, как в примере 1.

Зададимся некоторой квадратной матрицей $A=(a_{ij})_{n,n}$, Скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определим формулой

$$\begin{aligned}(\bar{x}, \bar{y}) = a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_1\beta_2 + ... + a_{1n}\alpha_1\beta_n + \\ + a_{21}\alpha_2\beta_1 + a_{22}\alpha_2\beta_2 + ... + a_{2n}\alpha_2\beta_n + ... + \\ + a_{n1}\alpha_n\beta_1 + a_{n2}\alpha_n\beta_2 + ... + a_{nn}\alpha_n\beta_n\end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять матрица A, чтобы определенное данной формулой скалярное произведение удовлетворяло бы аксиомам I-Ш.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что аксиома I выполняется для любой матрицы $A=(a_{ij})_{n,n}$. Для того, чтобы была выполнена аксиома II, т.е. чтобы выражение $(\bar{x}, \bar{y})$ было симметричным относительно $\bar{x}$ и $\bar{y}$, необходимо и достаточно, чтобы $a_{ij} = a_{ji}$, т.е. чтобы матрица $A=(a_{ij})_{n,n}$, была симметричной.

Аксиома III требует, чтобы выражение

$$\left(\overline{x},\overline{x}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j \tag{5.6.2}$$

было неотрицательно для любых $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ и обращалось в нуль лишь если $\alpha_1=0,\alpha_2=0,...,\alpha_n=0$.

Однородный многочлен (квадратичная форма), определяемый формулой (5.6.2), называется положительно определенным, если он принимает неотрицательные значения и обращается в нуль, только тогда, когда все α_i равны нулю. Следовательно, аксиома III требует, чтобы квадратичная форма (5.6.2) была положительно определенной. Таким образом, всякая матрица $A=(a_{ij})_{n,n}$ задает скалярное произведение в E_n, определяемое формулой (5.6.1), если только эта матрица симметричная и соответствующая ей квадратичная форма положительно определенная.

Если а качестве матрицы $A=(a_{ij})_{n,n}$ взять единичную матрицу E, т.е. положить $a_{ii}=1$, а $a_{ij}=0$ ($i\neq j$), то скалярное произведение принимает вид

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$$

и мы получаем евклидово пространство, определенное в примере 1.

3. Векторами пространства E_n будем называть непрерывные функции, заданные на интервале (a,b). Скалярное произведение таких функций определим как интеграл их произведения

$$\int_a^b f(t)g(t)dt\cdot$$

Можно проверить, что при таком определении скалярного произведения аксиомы I-III выполнены.

С помощью введенного понятия скалярного произведения определим длину вектора и угол между векторами.

Определение. Нормой (длиной) $\|\overline{x}\|$ вектора $\overline{x}$ в E_n называется корень квадратный из этого скалярного произведения:

$$\|\overline{x}\|=\sqrt{\left(\overline{x},\overline{x}\right)}.$$

Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$, скалярное произведение $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ которых равно нулю, называются ортогональными.

В любом евклидовом пространстве E_n верна «теорема Пифагора»: если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ортогональны, то

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|^2=\|\overline{x}\|^2+\|\overline{y}\|^2.$$

Определение. Угол между ненулевыми векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\|\overline{x}\|\cdot\|\overline{y}\|}.$$

Можно доказать, что в любом пространстве E_n справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)^2\le\|\overline{x}\|^2\cdot\|\overline{y}\|^2,$$

откуда следует, что

$$\frac{(\bar{x},\bar{y})^2}{\|\bar{x}\|^2\cdot\|\bar{y}\|^2}\le 1$$

или, что то же самое,

$$-1\le\frac{(\bar{x},\bar{y})^2}{\|\bar{x}\|^2\cdot\|\bar{y}\|^2}\le 1$$

Это означает, что косинус угла между векторами из E_n по модулю, не превосходит единицы. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – ненулевые векторы из E_n, то ортогональность означает, что угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Ненулевой вектор $\bar{x}$ пространства E_n, называется нормированным если его норма равна единице. Любой ненулевой вектор можно умножить на некоторое число так, что в результате получится нормированный вектор. Действительно, пусть $\bar{x}\in E_n$ – ненулевой вектор. Тогда $(\alpha\bar{x},\alpha\bar{x})=\alpha^2(\bar{x},\bar{x})$ и достаточно взять α таким, чтобы

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}}=\frac{1}{\|\bar{x}\|}$$

Число α называется нормирующим множителем для вектора $\bar{x}$.

Определение. Система векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$ пространства E_n называется ортогональной, если векторы этой системы попарно ортогональны.

Система векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$ называется ортонормированной, если векторы этой системы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице, т.е. если

$$(\bar{a}_i,\bar{a}_j)=\begin{cases}1, & при\, i=j\\ 0, & при\, i\ne j\end{cases} i,j=\overline{1,k}\,.$$

Теорема. Ортогональная система ненулевых векторов пространства E_n линейно независима.

Доказательство. Пусть ненулевые векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$ попарно ортогональны. Тогда $(\bar{a}_i,\bar{a}_j)=0\,при\quad i\ne j$.

Покажем, что векторное равенство

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_k\bar{a}_k=\bar{0} \qquad (5.6.3)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$. Умножим обе части равенства (5.6.3) скалярно на $\bar{a}_1$. Получим

$$\lambda_1(\bar{a}_1,\bar{a}_1)+\lambda_2(\bar{a}_1,\bar{a}_2)+...+\lambda_k(\bar{a}_1,\bar{a}_k)=\bar{0}$$

из условия ортогональности векторов имеем

$$(\bar{a}_1,\bar{a}_1)\ne 0,\ (\bar{a}_1,\bar{a}_j)=0,\ j=\overline{2,k}\,.$$

Следовательно, $\lambda_1=0$. Аналогично, умножая (5.6.3) на $\bar{a}_2$, получим что $\lambda_2=0$ и т.д. Таким образом, мы доказали, что $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$ линейно независимы.

Рассмотрим процесс ортогонализации векторов. Он состоит в том, что из заданных линейно независимых векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_m$ $(m\le n)$ строятся m попарно ортогональных векторов $\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_m$. Положим $\bar{b}_1=\bar{a}_1$. Вектор $\bar{b}_2$ будем искать в виде $\bar{b}_2=\bar{a}_2+\lambda_{21}\bar{b}_1$. Число λ_{21} следует подобрать так, чтобы векторы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ были ортогональны, т.е. $(\bar{b}_2+\lambda_{21}\bar{b}_1,\bar{a}_1)=0$, откуда $\lambda_{21}=-\frac{(\bar{b}_2,\bar{a}_1)}{(\bar{a}_1,\bar{a}_1)}$.

Допустим теперь, что попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{m-1}$ уже построены. Вектор $\bar{b}_m$ ищем в виде:

$$\bar{b}_m = \bar{a}_m + \lambda_{m1}\bar{b}_1 + ... + \lambda_{m,m-1}\bar{b}_{m-1},$$

т.е. вектор $\bar{b}_m$ мы получаем из вектора $\bar{a}_m$ «исправлением» его с помощью линейной комбинации уже построенных векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{m-1}$. Коэффициенты $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, ..., \lambda_{m,m-1}$ находим из условия ортогональности вектора $\bar{b}_m$ к векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{m-1}$:

$$\begin{gathered}
\left(\bar{a}_m + \lambda_{m1}\bar{b}_1 + ... + \lambda_{m,m-1}\bar{b}_{m-1}, \bar{b}_1\right) = 0 \\
\left(\bar{a}_m + \lambda_{m1}\bar{b}_1 + ... + \lambda_{m,m-1}\bar{b}_{m-1}, \bar{b}_2\right) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(\bar{a}_m + \lambda_{m1}\bar{b}_1 + ... + \lambda_{m,m-1}\bar{b}_{m-1}, \bar{b}_{m-1}\right) = 0
\end{gathered} \tag{5.6.4}$$

Так как векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{m-1}$ попарно ортогональны, то из равенств (5.6.4) получаем

$$\begin{gathered}
\left(\bar{a}_m, \bar{b}_1\right) + \lambda_{m1}\left(\bar{b}_1, \bar{b}_1\right) = 0, \\
\left(\bar{a}_m, \bar{b}_2\right) + \lambda_{m2}\left(\bar{b}_2, \bar{b}_2\right) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(\bar{a}_m, \bar{b}_{m-1}\right) + \lambda_{m,m-1}\left(\bar{b}_{m-1}, \bar{b}_{m-1}\right) = 0,
\end{gathered}$$

откуда

$$\lambda_{m1} = -\frac{\left(\bar{a}_m, \bar{b}_1\right)}{\left(\bar{b}_1, \bar{b}_1\right)}, \lambda_{m2} = -\frac{\left(\bar{a}_m, \bar{b}_2\right)}{\left(\bar{b}_2, \bar{b}_2\right)}, ..., \lambda_{m,m-1} = -\frac{\left(\bar{a}_m, \bar{b}_{m-1}\right)}{\left(\bar{b}_{m-1}, \bar{b}_{m-1}\right)}.$$

Докажем теперь, что построенный вектор $\bar{b}_m$ отличен от нуля. Вектор $\bar{b}_m$ есть линейная комбинация векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m, \bar{a}_m$. Но вектор $\bar{b}_{m-1}$ можно заменить линейной комбинацией вектора $\bar{a}_{m-1}$ и векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{m-2}$ и т.д. Окончательно мы получаем, что вектор $\bar{b}_m$ записывается в виде

$$\bar{b}_m = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_{m-1}\bar{a}_{m-1} + \bar{a}_m \tag{5.6.5}$$

откуда следует, что $\bar{b}_m \neq 0$. Действительно, в противном случае левая часть равенства (5.6.5) была бы равна $\bar{0}$, что противоречит линейной независимости векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m$ (коэффициент при $\bar{a}_m$ равен единице). Таким образом, доказано, что $\bar{a}_m \neq \bar{0}$. По векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{m-1}$ и $\bar{a}_m$ построен вектор $\bar{b}_m$. Таким же образом, по векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m, \bar{a}_{m+1}$, можно построить вектор $\bar{b}_{m+1}$. Продолжая этот процесс, можно по заданной системе n линейно независимых векторов в E_n построить систему n ненулевых ортогональных векторов. Докажем следующую теорему.

Теорема. Во всяком евклидовом пространстве E_n существуют ортонормированные базисы.

Доказательство. По определению n-мерного векторного пространства в нем существует некоторый базис $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$. С помощью процесса ортогонализации из него можно построить ортогональный базис $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_n$. Если теперь каждый вектор $\bar{b}_i, i = \overline{1,n}$ разделить на его норму, то получится ортонормированный базис, образованный векторами

$$\frac{\bar{b}_1}{\|\bar{b}_1\|}, \frac{\bar{b}_2}{\|\bar{b}_2\|}, ..., \frac{\bar{b}_n}{\|\bar{b}_n\|}.$$

Найдем выражение скалярного произведения в координатах. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ произвольный базис пространства E_n и

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n,$$
$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n.$$

Тогда

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i, \sum_{k=1}^{n} y_k\bar{e}_k \right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i y_k (\bar{e}_i, \bar{e}_k).$$

Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ – нормированный базис, то $(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = 0$, *при* $i \neq k$, $(\bar{e}_i, \bar{e}_i) \neq 0$, *при* $i = \overline{1, n}$ а, значит $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$. И обратно, если в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ скалярное произведение векторов $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$ и $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n$ равно $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, то этот базис ортонормированный, так как в этом случае $(\bar{e}_i, \bar{e}_i) \neq 0$, *при* $i = \overline{1, n}$ и $(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = 0$, *при* $i \neq k$. Если в некотором базисе скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, то этот базис ортонормированный.

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ – ортонормированный базис в E_n и $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$. Умножив обе части последнего равенства скалярно на $\bar{e}_i$ получим $(\bar{x}, \bar{e}_i) = x_i$, т.е. i-я координата вектора $\bar{x}$ в ортонормированном базисе равна скалярному произведению $\bar{x}$ на единичный вектор $\bar{e}_i$. Это скалярное произведение называется ортогональной проекцией вектора $\bar{x}$ на вектор $\bar{e}_i$. Таким образом, координаты вектора в ортонормированном базисе – это его проекции на базисные векторы.

Определим в пространстве E_n расстояние между векторами. Расстояние $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определяется как норма вектора $(\bar{x} - \bar{y})$:

$$\rho(\bar{x} - \bar{y}) = \|(\bar{x} - \bar{y})\| = \sqrt{((\bar{x} - \bar{y}), (\bar{x} - \bar{y}))} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x}) - 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y})}.$$

Из определения расстояния следует, что

1) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$;
2) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, *при* $\bar{x} \neq \bar{y}$;
3) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, *при* $\bar{x} = \bar{y}$;
4) $\rho(\bar{x}, \bar{z}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{y}, \bar{z})$ для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ из E_n.

Пример. По заданной в E_n системе линейно независимых векторов $\bar{a}_1 = (2,4,0)^T$, $\bar{a}_2 = (3,1,2)^T$, $\bar{a}_3 = (1,2,-1)^T$ построить ортонормированный базис.

Решение. Полагаем $\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (2,4,0)^T$. Вектор $\bar{b}_2$ будем находить в виде: $\bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \lambda_{21}\bar{b}_1$, где коэффициент

$$\lambda_{21} = -\frac{(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{2^2 + 4^2 + 0^2} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $\bar{b}_2 = (2,-1,2)^T$.

Находим вектор $\bar{b}_3 = \bar{a}_3 + \lambda_{31}\bar{b}_1 + \lambda_{32}\bar{b}_2$.

$$\lambda_{31} = -\frac{(\bar{a}_3, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1}{2}, \lambda_{32} = -\frac{(\bar{a}_3, \bar{b}_2)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)} = \frac{2}{9}$$

$$\bar{b}_3 = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9} \right)^T.$$

Находим нормы векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$.

$$\|\bar{b}_1\| = 2\sqrt{5} \quad \|\bar{b}_2\| = 3 \quad \|\bar{b}_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{5}$$

Нормируем векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$. Получим ортонормированный базис:

$$\bar{b}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)^T; \quad \bar{b}_2' = \frac{1}{3}(2,-1,2)^T; \quad \bar{b}_3' = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,-2,-5)^T.$$

5.7. Ортогональные преобразования

Рассмотрим свойства матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в пространстве E_n. Введем понятие ортогональной матрицы.

Определение. Матрица T с вещественными элементами называется ортогональной, если $T' = T^{-1}$ т.е. $TT' = T'T = E$.

Из определения следует, что ортогональная матрица всегда невырожденная, так как $|TT'| = |T| \cdot |T'| = |E| = 1$ и $|T'| = |T|$, то $|T| = \pm 1$.

Основные свойства ортогональной матрицы.

1. Матрица, обратная ортогональной, также ортогональна.

Пусть T – ортогональная матрица, т.е. $T' = T^{-1}$. Тогда $\left(T^{-1}\right)' = \left(T'\right)' = T = \left(T^{-1}\right)^{-1}$, т.е. $\left(T^{-1}\right)' = \left(T^{-1}\right)^{-1}$. Значит, матрица T^{-1} – ортогональна.

2. Матрица $T = \left(t_{ij}\right)_{n,n}$ ортогональна тогда и только тогда, когда ее элементы удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik} t_{jk}, \quad при \quad i \neq j, \quad \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^2 = 1 \cdot$$

Линейное преобразование $Y=TX$ с ортогональной матрицей T называется ортогональным. Так как $|T| = \pm 1$, то ортогональное преобразование всегда невырожденное.

Теорема. Ортогональное преобразование координат не изменяет скалярного произведения векторов.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $\widetilde{T}$, соответствующий матрице T, и два произвольных вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из E_n. Их образы обозначим через $\bar{x}_1$ и $\bar{y}_1$, т.е. $\bar{x}_1 = \widetilde{T}(\bar{x})$, $\bar{y}_1 = \widetilde{T}(\bar{y})$. Тогда $(\bar{x}, \bar{y}) = x'y$, $\quad (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (Tx)' Ty = x'T'Ty = x'Ey = x'y$.

Поэтому $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\widetilde{T}(\bar{x}), \widetilde{T}(\bar{y})\right) = (\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 1. Ортогональное преобразование не меняет норм векторов и углов между векторами.

Следствие 2. Ортогональное преобразование переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

Следствие 3. Матрица T перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной.

Следствие 4. Матрица T, приводящая симметричную матрицу A к диагональному виду, является ортогональной.

5.8. Выпуклые множества

Рассмотрим совместную систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5.8.1}$$

у которой ранг r матрицы $A = (a_{ij})_{n,m}$ меньше n , и пусть $k=n-r$.

Определение. Множество точек $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ из E_n, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (5.8.1), называется k-мерной плоскостью. Одномерные плоскости называются прямыми, а (n-1)-мерные плоскости – гиперплоскостями.

Очевидно, что каждую гиперплоскость можно задать всего одним линейным уравнением:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b .$$

В трехмерном пространстве E_3 гиперплоскости – это обычные плоскости, а в E_2 – это прямые.

Определение. Отрезком $[\overline{x}_1, \overline{x}_2]$ в E_n, соединяющим точки $\overline{x}_1$ *и* $\overline{x}_2$, называется множество таких точек $\overline{x}$, что

$$\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Точки $\overline{x}_1$ *и* $\overline{x}_2$ называются концами отрезка $[\overline{x}_1, \overline{x}_2]$.

Определение. Множество X пространства E_n называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $\overline{x}_1 \in X$ *и* $\overline{x}_2 \in X$ ему принадлежит и соединяющих их отрезок $[\overline{x}_1, \overline{x}_2]$.

Выпуклость множества X означает, что из $\overline{x}, \overline{y} \in X$ следует $\overline{z} = \alpha \overline{x} + (1-\alpha)\overline{y} \in X$ для всех $0 \le \alpha \le 1$. Например, в E_2 выпуклый отрезок, полупрямая, круг, треугольник, полуплоскость и вся плоскость.

Определение. Множество X точек пространства E_n называется ограниченным, если координаты всех его точек $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ в некотором базисе ограничены.

Пусть в пространстве задана гиперплоскость $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$. Все точки из E_n разбиваются этой гиперплоскостью на два полупространства: X_1 – множество точек, для которых $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \ge b$ и X_2 – множество точек, для которых $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \le b$.

Теорема. Каждое полупространство пространства E_n является выпуклым множеством.

Доказательство. Пусть точки $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ из E_n принадлежат, например, полупространству X_1. Тогда

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + ... + a_n \alpha_n \ge b$$

$$a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + ... + a_n \beta_n \ge b$$

Если $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – произвольная точка отрезка $[\overline{a}, \overline{b}]$, то

$$x_i = \lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \beta_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad где \quad \lambda_1, \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Для этой точки $\overline{x}$ имеем:

$$\begin{aligned} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = a_1(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) + a_2(\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2) + ... + a_n(\lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n) = \\ & = \lambda_1(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + ... + a_n \alpha_n) + \lambda_2(a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + ... + a_n \beta_n) \ge \\ & \ge \lambda_1 b + \lambda_2 b = (\lambda_1 + \lambda_2) b = b \end{aligned}$$

т.е. произвольная точка $\overline{x}$ отрезка $[\overline{a}, \overline{b}]$ принадлежит X_1. Теорема доказана.

Теорема. Пересечение любого числа выпуклых множеств есть множество выпуклое.

Доказательство. Пусть $X_1, X_2, ..., X_k$ – выпуклые множества в E_n. Если $X = X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_k$ состоит из одной точки, то оно выпукло. Если более чем из одной, то пусть $\bar{x}_1$ *и* $\bar{x}_2$ – любые две из них. Тогда $\bar{x}_1 \in X_i$ *и* $\bar{x}_2 \in X_i$, $i = \overline{1,k}$ и, так как все множества X_i выпуклы, то $[\bar{x}_1, \bar{x}_2] \in X_i$, $i = \overline{1,k}$ и, следовательно, $[\bar{x}_1, \bar{x}_2] \in X$, что и требовалось доказать.

Из данной теоремы следует, что гиперплоскость как пересечение выпуклых множеств X_1 и X_2, является выпуклым множеством. Каждая k-мерная плоскость в E_n также выпукла.

Пусть в E_n даны m полупространств, определяемых неравенствами

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.8.2}$$

Пересечение этих полупространств, называемое выпуклой многогранной областью, определяет множество решений системы линейных неравенств (5.8.2). Если это пересечение ограничено, оно называется выпуклым многогранником в E_n.

Определение. Последовательность $\{\bar{x}_m\}$ точек в E_n сходится к точке $\bar{x}$ при $m \to \infty$, если

$$\lim_{m \to \infty} \|\bar{x}_m - \bar{x}\| = 0.$$

Множество $N_\varepsilon(\bar{x}) = \{\bar{y} : \|\bar{y} - \bar{x}\| \le b\}$ называется ε окрестностью точки $\bar{x} \in E_n$.

Определение. Множество $X \in E_n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Точка $\bar{x} \in X$ из E_n называется внутренней точкой множества X, если существует такая ее ε-окрестность, все точки которой принадлежат множеству X.

Определение. Точка $\bar{x} \in X$ из E_n называется граничной точкой множества X, если любая ее ε-окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, ему не принадлежащие. Множество, состоящее из всех граничных точек множества X, называется границей множества X.

Определение. Точка $\bar{x} \in X$ называется крайней точкой (вершиной), если в X не существует точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \ne \bar{x}_2$, что $\bar{x} = \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, $0 < \lambda < 1$.

Для круга любая точка ограничивающей его окружности является крайней. Крайними точками являются все вершины выпуклого многогранника.

Определение. Точка $\bar{x}$ называется выпуклой комбинацией точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$, если существуют такие числа $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, что $\bar{x} = \lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + ... + \lambda_m\bar{x}_m$ при условии $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1$.

Например, любая внутренняя точка круга является выпуклой комбинацией концов хорды, проходящей через эту точку.

Теорема (о представлении). Любая точка $\bar{x}$ выпуклого замкнутого, ограниченного множества $X \subset E_n$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации конечного числа крайних точек этого множества.

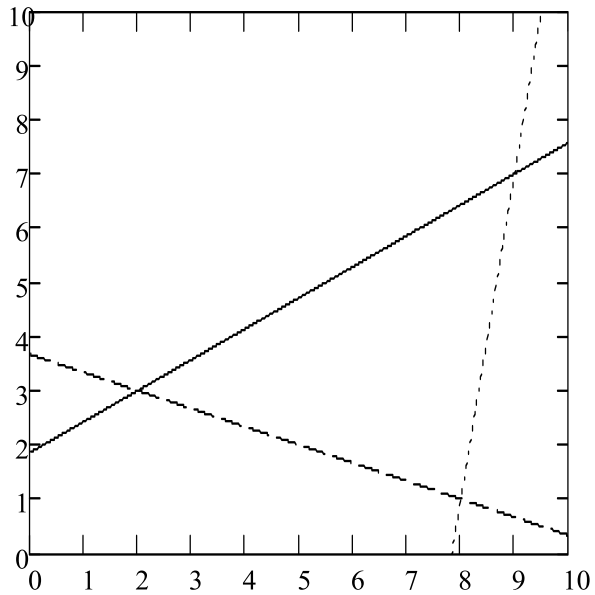
Пример. Используя теорему о представлении, выразить точку $\bar{x} = (6, \quad 3)^T$ в виде выпуклой комбинации крайних точек множества $X \subset E_2$, заданного системой неравенств

$$-4x_1 + 7x_2 \le 13$$

$$6x_1 - x_2 \le 47$$

$$x_1 + 3x_2 \le 11$$

Решение. Очевидно, что множество X выпукло. Множество X (рис.5.1)



представляет собой треугольник с вершинами $\bar{x}_1 = (2,\ \ 3)^T$ $\bar{x}_2 = (9,\ \ 7)^T$ $\bar{x}_3 = (8,\ \ 1)^T$. На основании теоремы о представлении точку $\bar{x} = (6,\ \ 3)^T$ можно представить в виде следующей выпуклой комбинации:

$$\bar{x} = \lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \lambda_3\bar{x}_3, \quad где \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

В координатной форме получим два уравнения:

$$2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 8\lambda_3 = 6$$

$$3\lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3 = 3$$

Добавляя к данной системе условие $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решая систему методом Жордана-Гаусса, получаем

$$\widetilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 19 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right), \widetilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4/19 \\ 1 & 0 & 0 & 7/19 \\ 0 & 0 & 1 & 8/19 \end{array}\right),$$

откуда $\lambda_1 = \dfrac{7}{19}, \quad \lambda_2 = \dfrac{4}{19}, \quad \lambda_3 = \dfrac{8}{19}$.

Все эти коэффициенты удовлетворяют условию неотрицательности: $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$.

Поэтому искомое представление имеет вид $\bar{x} = \dfrac{1}{19}(7\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 8\bar{x}_3)$.

5.9. Задания для самостоятельной работы по главе 5

5.1. Доказать, что скалярное произведение двух любых векторов

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

евклидова пространства тогда и только тогда выражается равенством

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n,$$

когда базис, в котором взяты координаты, является ортонормированным.

5.2. Проверить, что векторы системы ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса.

$$(1,\quad -2,\quad 2,\quad -3),\quad (2,\quad -3,\quad 2,\quad 4).$$

5.3. Найти векторы, дополняющие систему векторов до ортонормированного базиса

$$\left(\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2}\right).$$

5.4. Построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов

$$(1,\quad 1,\quad -1,\quad -2),\quad (5,\quad 8,\quad -2,\quad -3),\quad (3,\quad 9,\quad 3,\quad 8).$$

5.5. Найти расстояние между двумя плоскостями

$$x = a_1t_1 + a_2t_2 + x_1 \quad и \quad x = a_3t_1 + a_4t_2 + x_2$$

где

$a_1 = (1,\quad 2,\quad 2,\quad 2),$	$a_2 = (2,\quad -2,\quad 1,\quad 2),$	$x_1 = 4(1,\quad 5,\quad 3,\quad 2),$
$a_3 = (2,\quad 0,\quad 2,\quad 1),$	$a_4 = (1,\quad -2,\quad 0,\quad -1),$	$x_1 = (1,\quad -2,\quad 1,\quad -3).$

5.6. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}$$

для любых вещественных чисел $a_i, b_i, \quad i = \overline{1,n}$.

5.7. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, вершины которого заданы своими координатами

$$A(2,\quad 4,\quad 2,\quad 4,\quad 2),\quad B(6,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad 6),\quad C(5,\quad 7,\quad 5,\quad 7,\quad 2).$$

5.8. Определителем Грама векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ евклидова пространства E_n называется определитель

$$g(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k) = \begin{vmatrix} (\overline{a}_1, \overline{a}_1) & (\overline{a}_1, \overline{a}_2) & ... & (\overline{a}_1, \overline{a}_k) \\ (\overline{a}_2, \overline{a}_1) & (\overline{a}_2, \overline{a}_2) & ... & (\overline{a}_2, \overline{a}_k) \\ ... & ... & ... & ... \\ (\overline{a}_k, \overline{a}_1) & (\overline{a}_k, \overline{a}_2) & ... & (\overline{a}_k, \overline{a}_k) \end{vmatrix}$$

Доказать, что определитель Грама не изменяется при применении к векторам $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ процесса ортогонализации, т.е. если в процессе ортогонализации векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ перейдут в векторы $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_k$, то

$$g(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k) = g(\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_k) = (\overline{b}_1, \overline{b}_1)(\overline{b}_2, \overline{b}_2)...(\overline{b}_k, \overline{b}_k).$$

Пользуясь этим, выяснить геометрический смысл $g(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ и $g(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$, предполагая векторы линейно независимыми.

5.9. Доказать, что существует единственное преобразование трехмерного пространства, переводящего векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ соответственно в $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$\overline{a}_1 = (2,\quad 3,\quad 5),\qquad \overline{a}_2 = (0,\quad 1,\quad 2),\qquad \overline{a}_3 = (1,\quad 0,\quad 0),$

$\overline{b}_1 = (1,\quad 1,\quad 1),\qquad \overline{b}_2 = (1,\quad 1,\quad -1),\qquad \overline{b}_3 = (2,\quad 1,\quad 2).$

5.10. Доказать, что существует единственное преобразование трехмерного пространства, переводящего векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ соответственно в $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$\overline{a}_1 = (2, \quad 0, \quad 3)$, $\qquad \overline{a}_2 = (4, \quad 1, \quad 5)$, $\qquad \overline{a}_3 = (3, \quad 1, \quad 2)$,

$\overline{b}_1 = (1, \quad 2, \quad -1)$, $\qquad \overline{b}_2 = (4, \quad 5, \quad -2)$, $\qquad \overline{b}_3 = (1, \quad -1, \quad 1)$.

5.11. Линейное преобразование φ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе:

$$\overline{e}_1, \quad \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3, \quad \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 + \overline{e}_4 .$$

5.12. Линейное преобразование φ в базисе

$\overline{a}_1 = (8, \quad -6, \quad 7)$, $\qquad \overline{a}_2 = (-16, \quad 7, \quad -13)$, $\qquad \overline{a}_1 = (9, \quad -3, \quad 7)$

имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

Найти его матрицу в базисе

$\overline{b}_1 = (1, \quad -2, \quad 1)$, $\qquad \overline{b}_2 = (3, \quad -1, \quad 2)$, $\qquad \overline{b}_1 = (2, \quad 1, \quad 2)$.

5.13. Найти канонический вид B ортогональной матрицы A и ортогональную матрицу Q такую, что $B = Q^{-1}AQ$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

5.14. Доказать, что для выполнения равенства $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = \beta\overline{x} + \alpha\overline{y}$, где α, β – числа и $\overline{x}, \overline{y}$ векторы, необходимо и достаточно, чтобы было или $\alpha = \beta$, или $\overline{x} = \overline{y}$.

5.15. Доказать теорему: для того чтобы две линейно независимые системы с одинаковым числом векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$, $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_k$ n-мерного пространства R_n были эквивалентны (или порождали одно и то же подпространство), необходимо и достаточно, чтобы в любом базисе соответствующие друг другу миноры матриц A и B из координатных строк векторов этих систем были пропорциональны.

Глава 6. Линейные операторы

6.1. Определение линейного оператора

Определение. Оператором $\widetilde{A}$, отображающим векторное пространство R_n в векторное пространство R_m, называется функция, которая каждому вектору $\bar{x} \in R_n$ ставит в соответствие единственный вектор $\bar{y} \in R_m$, что символически записывается в виде $\bar{y} = \widetilde{A}(\bar{x})$. Вектор $\bar{y}$ называется образом вектора $\bar{x}$ при отображении $\widetilde{A}$, а вектор $\bar{x}$ – прообразом вектора $\bar{y}$.

Оператор $\widetilde{A}$ называется линейным, если:

1) $\widetilde{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \widetilde{A}(\bar{x}_1) + \widetilde{A}(\bar{x}_2)$ для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ из R_n (условие аддитивности);

2) $\widetilde{A}(\lambda\bar{x}) = \lambda\widetilde{A}(\bar{x})$ для любого $\bar{x} \in R_n$, где λ – произвольное число (условие однородности);

При λ=0 имеем $\widetilde{A}(\bar{0}) = \bar{0}$, т.е. линейный оператор преобразует нулевой вектор в нулевой. Рассмотрим связь между координатами вектора $\bar{x} \in R_n$ и координатами вектора $\bar{y} \in R_m$. Для этого выразим векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно через базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ пространства R_n и базис $\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_m$ пространства R_m:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n \tag{6.1.1}$$

$$\bar{y} = y_1\bar{g}_1 + y_2\bar{g}_2 + ... + y_m\bar{g}_m \tag{6.1.2}$$

Тогда имеем

$$\bar{y} = \widetilde{A}(\bar{x}) = \widetilde{A}(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n) = x_1\widetilde{A}(\bar{e}_1) + x_2\widetilde{A}(\bar{e}_2) + ... + x_n\widetilde{A}(\bar{e}_n) \tag{6.1.3}$$

Из выражения (6.1.3) следует, что для задания оператора $\widetilde{A}$ достаточно задать образы базисных векторов $\widetilde{A}(\bar{e}_i), i = \overline{1,n}$.

Разложим каждый вектор $\widetilde{A}(\bar{e}_i), i = \overline{1,n}$ по базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_m$ пространства R_m:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(\bar{e}_1) &= a_{11}\bar{g}_1 + a_{21}\bar{g}_2 + ... + a_{m1}\bar{g}_m, \\ \widetilde{A}(\bar{e}_2) &= a_{12}\bar{g}_1 + a_{22}\bar{g}_2 + ... + a_{m2}\bar{g}_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{A}(\bar{e}_n) &= a_{1n}\bar{g}_1 + a_{2n}\bar{g}_2 + ... + a_{mn}\bar{g}_m. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Матрица A' из коэффициентов разложений имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.1.5}$$

Из равенства (6.1.3) и (6.1.5) получаем:

$$y_1\bar{g}_1 + y_2\bar{g}_2 + ... + y_m\bar{g}_m = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\bar{g}_1 +$$
$$+ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\bar{g}_2 + ... + (a_m x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)\bar{g}_m$$

откуда в силу единственности разложения вектора $\bar{y}$ по базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_m$ следует, что

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \qquad (6.1.6)$$
$$..$$
$$y_m = a_m x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n$$

или в матричном виде

$$Y=AX \qquad (6.1.7$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица A называется матрицей линейного оператора $\widetilde{A}$.

Рассмотрим случай, когда оператор $\widetilde{A}$ задается в пространстве R_n и отображает это пространство на себя.

Тогда уравнения (6.1.4) принимают вид:

$$\widetilde{A}(\overline{e}_1) = a_{11}\overline{g}_1 + a_{21}\overline{g}_2 + ... + a_{n1}\overline{g}_n,$$
$$\widetilde{A}(\overline{e}_2) = a_{12}\overline{g}_1 + a_{22}\overline{g}_2 + ... + a_{n2}\overline{g}_n,$$
$$..$$
$$\widetilde{A}(\overline{e}_n) = a_{1n}\overline{g}_1 + a_{2n}\overline{g}_2 + ... + a_{nn}\overline{g}_n.$$

и матрицей оператора $\widetilde{A}$ является квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n,n}$.

Формулы (6.1.6) принимают вид:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n,$$
$$..$$
$$y_n = a_n x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$$

Отсюда следует, что всякому линейному оператору $\widetilde{A}$ в пространстве R_n при выбранном базисе соответствует некоторая квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n,n}$.

Справедливо и обратное утверждение: всякой матрице $A = (a_{ij})_{n,n}$ при заданном базисе соответствует некоторый линейный оператор $\widetilde{A}$.

Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между линейными операторами $\widetilde{A}$ в пространстве R_n и матрицами A порядка n.

Если $|A| \neq 0$, то $\widetilde{A}$ – невырожденный оператор.

Оператор $\widetilde{A}^{-1}$ называется обратным по отношению к оператору $\widetilde{A}$, если:

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{A}^{-1} \cdot \widetilde{A} = \widetilde{E}$$

где $\widetilde{E}$ – тождественный оператор, матрицей которого является единичная матрица порядка n.

Рассмотрим, как изменяется матрица линейного оператора $\widetilde{A}$ при переходе к новому базису в пространстве R_n.

Пусть в пространстве R_n заданы два базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ и $\overline{e}_1*, \overline{e}_2*, ..., \overline{e}_n*$, связь между которыми задается невырожденной матрицей перехода $T = (t_{ij})_{n,n}$. Тогда связь между координатами векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в новом и старом базисах можно выразить в виде следующих матричных уравнений:

$$X=TX^*,\ Y=TY^*.$$

Учитывая, что $Y=AX$, получим

$$TY^*=ATX,$$

откуда $Y^*=T^{-1}ATX^*$.

Обозначив матрицу оператора A в новом базисе через $A^*=T^{-1}AT$, получим $Y^*=A^*X^*$.

Матрица A^* называется преобразующей матрицей.

Отметим, что матрица A и A^* описывают действие одного и того же оператора $\widetilde{A}$ в разных базисах.

Покажем, что матрицы A и A^* подобны, то есть $|A^*|=|A|$. Действительно,

$$|A^*|=|T^{-1}AT|=|T^{-1}||A||T|=|A|.$$

Из выведенного соотношения следует, что определитель матрицы A линейного преобразования $\widetilde{A}$ не зависит от выбора базиса в R_n.

Примеры линейных операторов.

1. Если для каждого вектора $\bar{x} \in R_n$ $\widetilde{A}(\bar{x}) = \bar{0}$, то оператор $\widetilde{A}$ является линейным и называется нулевым оператором $\widetilde{0}$. Так как для любого базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ $\widetilde{A}(\bar{e}_i) = \bar{0}, i = \overline{1,m}$, то матрицей нулевого оператора $\widetilde{0}$ является нулевая матрица.

2. Если для каждого вектора $\bar{x} \in R_n$ $\widetilde{A}(\bar{x}) = \bar{x}$, то оператор $\widetilde{A}$ является линейным и называется тождественным оператором $\widetilde{E}$. Очевидно, что матрицей тождественного оператора является единичная матрица E.

3. Если для каждого вектора $\bar{x} \in R_n$ $\widetilde{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, то оператор $\widetilde{A}$ является линейным и называется оператором подобия. Так как для любого базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ $\widetilde{A}(\bar{e}_i) = \lambda\bar{e}_i, i = \overline{1,n}$, то матрица оператора подобия равна λE.

6.2. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Как было показано(6.1.), все матрицы, подобные матрице A, т.е. все матрицы вида $A^*= T^{-1}AT$, где T – любая невырожденная матрица (квадратная), обладают одним и тем же определителем $|A|=|A^*|$.

Подобные матрицы обладают еще одной общей для всех них характеристикой.

Наряду с матрицей A рассмотрим матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix},$$

которая образована из A заменой диагональных элементов a_{ij} элементами $a_{ii}-\lambda$, где λ – произвольное число. Определитель этой матрицы

$$\Delta(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

представляет собой многочлен степени n относительно λ (коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$). Многочлен $\Delta(\lambda)=|A-\lambda E|$ называется характеристическим многочленом матрицы A.

Покажем, что все подобные матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен, т.е. что $|A^*-\lambda E|=|A-\lambda E|=\Delta(\lambda)$, где $A^*=T^{-1}AT$.

Для этого воспользуемся тождеством $E^*=T^{-1}ET$. Тогда, заменяя в матрице $A^*-\lambda E$ матрицы A^* и E соответственно на $T^{-1}AT$ и $T^{-1}ET$, получаем:

$$|A^*-\lambda E|=|T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET|=|T^{-1}(A-\lambda E)T|=|T^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|T|=|A-\lambda E|.$$

Таким образом, все подобные матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен $\Delta(\lambda)=|A-\lambda E|$.

Алгебраическое уравнение n-й степени $\Delta(\lambda)=0$ называется характеристическим уравнением матрицы A, а его корни – характеристическими числами.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^n-\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+\dots+(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\lambda+(-1)^n\alpha_n=0$$

где α_k – след k-го порядка матрицы A.

Следом k-го порядка α_k называется сумма возможных $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ главных миноров k-ого порядка:

$$\alpha_1=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}=tr(A),$$

$$\alpha_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\dots,$$

....

$$\alpha_n=|A|.$$

Характеристическое уравнение имеет n не обязательно различных корней $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. Каждому характеристическому корню соответствует собственный вектор с точностью до постоянного множителя.

Сумма характеристических корней равна следу матрицы A:

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=tr(A),$$

а произведение характеристических корней равно определителю матрицы A:

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\dots\cdot\lambda_n=|A|$$

Число ненулевых корней совпадает с рангом матрицы линейного оператора.

Одним из методов для нахождения коэффициентов $\alpha_i\ (i=\overline{1,n})$ характеристического уравнения является методом Фаддеева. Пусть линейный оператор $\widetilde{A}$ задан матрицей A. Тогда коэффициенты α_i вычисляются по следующей схеме:

$$A_1 = A, \alpha_1 = tr(A_1), B_1 = A_1 - \alpha_1 E,$$

$$A_2 = AB_1, \alpha_2 = \frac{1}{2} tr(A_2), B_2 = A_2 - \alpha_2 E,$$

....

$$A_{n-1} = AB_{n-2}, \alpha_{n-1} = \frac{1}{n-1} tr(A_{n-1}), B_{n-1} = A_{n-1} - \alpha_{n-1} E,$$

$$A_n = AB_{n-1}, \alpha_n = \frac{1}{n} tr(A_n), B_n = A_n - \alpha_n E.$$

Пример. Найти собственные значения линейного оператора $\widetilde{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - \alpha_1 \lambda^2 - \alpha_2 \lambda - \alpha_3 = 0$$

где $\alpha_1 = tr(A) = 14 + 12 + 10 = 36,$

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}; B_1 = A_1 - \alpha_1 E = \begin{pmatrix} -22 & -4 & 0 \\ -4 & -24 & -4 \\ 0 & -4 & -26 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{pmatrix} -292 & 40 & 16 \\ 40 & -256 & 56 \\ 16 & 56 & -244 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-292 - 256 - 244) = -396,$$

$$\alpha_3 = |A| = \begin{vmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 1296.$$

В итоге получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 36\lambda^2 - 336\lambda - 1296 = 0$$

или $(\lambda - 36)(\lambda - 12)(\lambda - 6) = 0,$ откуда $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 6$ – собственные значения линейного оператора $\widetilde{A}$.

Теорема Гамильтона-Кэли. Каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = \lambda^n + \alpha_n \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n. \quad (6.2.1)$$

Пусть матрица *B* является присоединенной к матрице $A - \lambda E$. Тогда имеем

$$(A - \lambda E)B = |A - \lambda E| E. \quad (6.2.2)$$

Элементами матрицы *B* являются многочлены от λ степени не выше (*n-1*). Поэтому матрицу *B* можно представить в следующем виде:

$$B = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1} \quad (6.2.3)$$

Подставляя выражения матрицы B из (6.2.3) и многочлена $|A-\lambda E|$ из (6.2.1) в равенство (6.2.2), получим

$$(A-\lambda E)(B_0+\lambda B_1+\lambda^2 B_2+...+\lambda^{n-1}B_{n-1})=(\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+...+\alpha_n)E$$

или

$$\begin{aligned}&(AB_0+\lambda(AB_1-B_0)+\lambda^2(AB_2-B_1)+...+\lambda^{n-1}(AB_{n-1}-B_{n-2})-\lambda^n B_{n-1}=\\&=\lambda^n E+\lambda^{n-1}\alpha_1 E+\lambda^{n-2}\alpha_2 E+...+\alpha_n E\end{aligned} \qquad (6.2.4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях равенства (6.2.4), получим

$$\begin{aligned}&-B_{n-1}=E,\\&AB_{n-1}-B_{n-2}=\alpha_1 E,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&AB_1-B_0=\alpha_{n-1}E,\\&AB_0=\alpha_n E.\end{aligned}$$

Умножим равенства (6.2.5) соответственно на $A^n, A^{n-1},..., A, E$ и сложим полученные результаты:

$$\begin{aligned}&-A^n B_{n-1}+A^{n-1}B_{n-1}-A^{n-2}B_{n-2}+...+A^2B_1-AB_0+AB_0=\\&=A^n+\alpha_1 A^{n-1}+...+\alpha_{n-1}A+\alpha_n\end{aligned}$$

или

$$A^n+\alpha_1 A^{n-1}+...+\alpha_{n-1}A+\alpha_n=0,$$

откуда следует, что $\Delta(\lambda)=0$. Теорема доказана.

Пример. Линейный оператор $\widetilde{A}$ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}.$$

Найти $\Delta(\lambda)$ и показать, что $\Delta(\lambda)=0$.

Решение. Составим матрицу

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda&2\\5&4-\lambda\end{pmatrix}$$

Многочлен $\Delta(\lambda)=|A-\lambda E|$ имеет вид

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\5&4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6.$$

Тогда

$$\Delta(\lambda)=A^2-5A-6E=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

6.3. Собственный вектор и собственное число линейного оператора

Пусть в пространстве R_n задан линейный оператор $\widetilde{A}$.

Определение. Ненулевой вектор $\overline{x}\in R_n$, удовлетворяющий соотношению $\widetilde{A}(\overline{x})=\lambda\overline{x}$, называется собственным вектором, а соответствующее число λ – собственным значением оператора $\widetilde{A}$.

Из данного определения следует, что образом собственного вектора $\bar{x}$ является коллинеарный ему вектор $\lambda\bar{x}$.

Отметим некоторые свойства собственных векторов оператора $\widetilde{A}$.

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное число. Предположим обратное: пусть собственному вектору $\bar{x}$ оператора $\widetilde{A}$ соответствуют два собственных числа λ_1 и λ_2. Это значит, что

$$\widetilde{A}(\bar{x}) = \lambda_1\bar{x},$$
$$\widetilde{A}(\bar{x}) = \lambda_2\bar{x}.$$

Но отсюда следует, что

$$\lambda_1\bar{x} - \lambda_2\bar{x} = \bar{0}$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{x} = \bar{0}$$

Так как по условию $\bar{x}$ – ненулевой вектор, то $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Если $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – собственные векторы оператора $\widetilde{A}$ с одним и тем же собственным числом λ, то их сумма $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ также является собственным вектором оператора $\widetilde{A}$ с собственным числом λ. Действительно, так как $\widetilde{A}(\bar{x}_1) = \lambda\bar{x}_1$ и $\widetilde{A}(\bar{x}_2) = \lambda\bar{x}_2$, то

$$\widetilde{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \widetilde{A}(\bar{x}_1) + \widetilde{A}(\bar{x}_2) = \lambda\bar{x}_1 + \lambda\bar{x}_2 = \lambda(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

3. Если $\bar{x}$ – собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ с собственным числом λ, то любой вектор $\alpha\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{x}$, также является собственным вектором оператора $\widetilde{A}$ с тем же самым собственным числом λ.

Действительно,

$$\widetilde{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha(\widetilde{A}\bar{x}) = \alpha(\lambda\bar{x}) = \lambda(\alpha\bar{x}).$$

Таким образом, каждому собственному числу λ соответствует бесчисленное множество коллинеарных собственных векторов. Из свойств 2 и 3 следует, что множество собственных векторов оператора $\widetilde{A}$, соответствующих одному и тому же собственному числу, образует пространство, которое является подпространством пространства R_n.

Докажем теорему о существовании собственного вектора.

Теорема. В комплексном линейном пространстве R_n каждый линейный оператор $\widetilde{A}$ имеет, по крайней мере, один собственный вектор.

Доказательство. Пусть $\widetilde{A}$ – линейный оператор, заданный в пространстве R_n, а $\bar{x}$ – собственный вектор этого оператора с собственным числом λ, т.е. $\widetilde{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$. Выберем произвольный базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ и обозначим координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе через $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$. Тогда, если $A = (a_{ij})_{n,n}$ – матрица оператора $\widetilde{A}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, то, записывая соотношение в матричной форме, получим

$$AX = \lambda EX$$
$$\text{или } (A - \lambda E)X = 0 \tag{6.3.1}$$
$$\text{где } X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}^T.$$

В координатной форме матричное уравнение (6.3.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\
&a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0.
\end{aligned} \qquad (6.3.2)$$

Для отыскания собственного вектора необходимо найти ненулевые решения системы (6.3.2), которые существуют тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, т.е. когда $|A-\lambda E|=0$. Отсюда следует, что собственное число линейного оператора $\widetilde{A}$ является его характеристическим числом, которое всегда существует. Подставляя это число в систему (6.3.2), найдет ненулевое решение этой системы, которое определяет искомый собственный вектор. Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что нахождение собственного числа линейного оператора $\widetilde{A}$ и соответствующего ему собственного вектора $\bar{x}$ сводится к решению характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m (m \le n)$ – различные корни характеристического уравнения. Подставив какой-нибудь корень λ_i в систему (6.3.2), найдем все ее линейно независимые решения, которые и определяют собственные векторы, соответствующие собственному числу λ_i. Если ранг матрицы $A-\lambda_i E$ равен r и $r<n$, то существует $k=n-r$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих корню.

Пример. Найти собственные векторы линейного оператора $\widetilde{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\lambda-1)^2(4-\lambda)=0$, откуда $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=4$.

Подставляем корни $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=4$ в систему (6.3.1). Найдем собственные векторы оператора $\widetilde{A}$.

При $\lambda_1=\lambda_2=1$ имеем

$$(A-\lambda E)X=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получим однородную систему трех линейных уравнений, из которых только одно (любое) является линейно независимым. Общее решение системы имеет вид $x_1=-x_2-x_3$. Найдем два линейно независимых решения:

$$\bar{x}_1^{(1)} = (-1,1,0)^T, \bar{x}_1^{(2)} = (-1,0,1)^T.$$

Тогда собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1=\lambda_2=1$, имеют вид

$$\overline{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \overline{x}^{(2)} = c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

где c – произвольное действительное число, отличное от нуля.

При $\lambda_3 = 4$ имеем

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$x_1 = x_3, x_2 = x_3, x_1 = x_2$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 4$, равен

$$\overline{x}^{(3)} = c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Теорема. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p \, (p \le n)$ оператора $\widetilde{A}$ попарно различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_p$ линейно независимы.

Доказательство. Используем метод индукции по числу переменных. Так как $\overline{x}_1$ – ненулевой вектор, то при p=1 утверждение теоремы справедливо.

Пусть утверждение теоремы справедливо для $m<p$ векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$. Присоединим к этим векторам вектор $\overline{x}_{m+1}$ и допустим, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \overline{x_k} = \overline{0} \quad (6.3.3)$$

Используя свойство линейного оператора, получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \widetilde{A}(\overline{x_k}) = \overline{0} \quad (6.3.4)$$

Так как $\overline{x}_k$, $k = \overline{1, m+1}$, -собственные векторы, то $\widetilde{A}(\overline{x_k}) = \lambda \overline{x_k}$ и поэтому равенство (6.3.4) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k \overline{x_k} = \overline{0} \quad (6.3.5)$$

Умножим (6.3.3) на λ_{m+1} и вычтем из (6.3.5), получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \overline{x_k} = \overline{0} \quad (6.3.6)$$

По условию все $\lambda_k, k = \overline{1, p}$, различны, поэтому $\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$. Система векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$ – линейно независимая. Поэтому из (6.3.6) следует, что $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_m = 0$. Тогда из (6.3.3) и из условия, что $\overline{x}_{m+1}$ – собственный вектор ($\overline{x}_{m+1} \neq \overline{0}$), получаем $\lambda_{m+1} = 0$. Это означает, что $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{m+1}$ – система линейно независимых векторов. Индукция проведена. Теорема доказана.

Следствие: если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ попарно различны, то отвечающие им собственные векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ образуют базис пространства R_n.

Теорема. Если в качестве базиса пространства R_n принять n линейно независимых собственных векторов, то оператору $\widetilde{A}$ в этом базисе соответствует диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\overline{x} \in R_n$ и базис, составленный из собственных векторов $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, ..., \overline{x}^{(n)}$ этого пространства. Тогда $\overline{x} = x_1 \overline{x}^{(1)} + x_2 \overline{x}^{(2)} + ... + x_n \overline{x}^{(n)}$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, ..., \overline{x}^{(n)}$.

Применяя к вектору $\overline{x}$ оператор $\widetilde{A}$, получим $\overline{y} = \widetilde{A}(\overline{x})$ или $\overline{y} = \widetilde{A} \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} x_j \widetilde{A}(\overline{x}^{j})$.

Так как $\overline{x}^{(j)}, j = \overline{1,n}$, – собственный вектор, то $\widetilde{A}(\overline{x}^{j}) = \lambda_j \overline{x}^{(j)}$.

Тогда

$$\overline{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \overline{x}^{(j)} \tag{6.3.7}$$

Из (6.3.7) имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 x_1, \\ y_2 &= \lambda_2 x_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \lambda_n x_n. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Равенства (6.3.8) означают, что матрица линейного оператора $\widetilde{A}$ в базисе $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, ..., \overline{x}^{(n)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Определение. Линейный оператор $\widetilde{A}$ в пространстве R_n называется оператором простой структуры, если он имеет n линейно независимых собственных векторов.

Очевидно, что операторы простой структуры, и только они, имеют диагональные матрицы в некотором базисе. Этот базис может быть составлен лишь из собственных векторов оператора $\widetilde{A}$. Действие любого оператора простой структуры всегда сводится к «растяжению» координат вектора в данном базисе.

6.4. Задания для самостоятельной работы по главе 6

6.1.–6.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных в некотором базисе матрицами:

6.1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 6.2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 6.3. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

6.4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ 6.5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ 6.6. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

6.7. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 6.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6.9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

6.11. Доказать, что собственные векторы линейного преобразования, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

6.12. Пусть $\bar{x}$ – собственный вектор линейного преобразования φ, принадлежащий собственному значению λ, и $f(t)$ – функция, для которой преобразование $f(\varphi)$ имеет смысл (если φ в некотором базисе имеет матрицу A, то $f(\varphi)$ определяется в том же базисе матрицей $f(A)$, причем можно доказать, что $f(\varphi)$ не зависит от выбора базиса). Доказать, что тот же вектор $\bar{x}$ будет собственным вектором преобразования $f(\varphi)$, принадлежащим собственному значению $f(\lambda)$.

6.13. Пусть $\bar{x}$ – собственный вектор линейного преобразования φ, принадлежащий собственному значению λ, и $f(t)$ – многочлен. Доказать, что тот же вектор $\bar{x}$ будет собственным вектором преобразования $f(\varphi)$, принадлежащим собственному значению $f(\lambda)$. Иными словами, доказать, что из $\varphi\bar{x} = \lambda\bar{x}$ следует $f(\varphi)\bar{x} = f(\lambda)\bar{x}$.

6.14. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, являющегося дифференцированием многочленов степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами.

6.15. Даны векторы

$$\bar{p}_1 = (1, \quad 1, \quad 1), \quad \bar{p}_2 = (1, \quad 2, \quad 1), \quad \bar{p}_3 = (3, \quad 2, \quad 1), \quad \bar{p}_4 = (0, \quad 2, \quad 2),$$

где $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ образуют новый базис, в базисе

$$\bar{e}_1 = (1, \quad 0, \quad 0), \quad \bar{e}_2 = (0, \quad 1, \quad 0), \quad \bar{e}_3 = (0, \quad 0, \quad 1).$$

Найти связь между новым и старым базисом. Найти координаты вектора $\bar{p}_4$ в новом базисе.

Глава 7. Квадратичные формы

7.1. Определение квадратичной формы

Определение. Квадратичной формой от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется алгебраическая сумма, каждый член которой является либо квадратом одного из неизвестных, либо произведением двух различных неизвестных.

В общем виде квадратичная сумма может быть записана следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2$$

Коэффициенты a_{ij} в этой записи образуют треугольную матрицу. Однако эта форма записи неудобна.

Запишем $f(\bar{x})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \; & c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + ... + c_{1n}x_1x_n + \\ & + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 + + ... + c_{2n}x_2x_n + \\ & + ... + \\ & + c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + ... + c_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

где $c_{ij} = c_{ji}$. Такую запись квадратичной формы назовем правильной. Матрица $C = (c_{ij})_{n,n}$ называется матрицей квадратичной формы. Очевидно, что C – симметрическая матрица.

Квадратичная форма может быть записана более компактно, если использовать матричные обозначения. Вынося x_1 из первой строки записи, x_2 – из второй, …, x_n – из последней, получим

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \; & x_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n) + \\ & + x_2(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n) + \\ & + ... + \\ & + x_n(c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n) = \\ & = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1n} \\ c_{21}c_{22}...c_{2n} \\ .... \\ c_{n1}c_{n2}...c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T CX. \end{aligned}$$

Таким образом, квадратичная форма в матричной записи имеет вид

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T CX,$$

где $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, C – симметрическая квадратная матрица порядка n, коэффициент $c_{ii}, i = \overline{1,n}$ которой равен коэффициенту при x_i^2, а коэффициент $c_{ij} = c_{ji}, i \neq j; i, j = \overline{1,n}$, половине коэффициента при произведении x_ix_j.

Квадратичную форму $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить и в виде скалярного произведения векторов. Для этого введем

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Тогда $f(\bar{x}) = (\bar{x}, C\bar{x})$.

Пример. Представить квадратичную форму

$$f(\overline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3$$

в виде скалярного произведения векторов.

Решение. Очевидно, что

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(\overline{x}) = \left(\overline{x}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \overline{x} \right).$$

7.2. Линейное преобразование переменных в квадратичной форме

Пусть в квадратичной форме $f(\overline{x}) = X^T CX$ делается линейное преобразование переменных $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j, i = \overline{1,n}, \quad .$$

с матрицей $B = (b_{ij})_{n,n}$

В результате данного преобразования будет получена квадратичная форма, зависящая от новых переменных $y_1, y_2, ..., y_n$:

$$f(y_1, y_2, ..., y_n) = (Y^T B^T)C(BY) = Y^T (B^T CB)Y.$$

Покажем, что квадратичная форма $f(y_1, y_2, ..., y_n)$ автоматически получается правильно записанной. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица $B^T CB$ симметрична. Действительно,

$$(B^T CB)^T = B^T (B^T C)^T = B^T C^T (B^T)^T = B^T CB.$$

Откуда следует симметричность матрицы $B^T CB$.

Пример. Осуществить над квадратичной формой $f(\overline{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ линейное преобразование, заданное матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Переменные x_1, x_2 матрицей B преобразуются в переменные y_1, y_2. Связь между переменными выражается матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

откуда $x_1 = y_1 + 2y_2, x_2 = 3y_1 + 4y_2$.

В квадратичную форму $f(\bar{x})$ вместо переменных x_1 и x_2 подставим их выражения через переменные y_1 и y_2. Получим квадратичную форму

$$f(y_1, y_2) = 2(y_1 + 2y_2)^2 - 4(y_1 + 2y_2)(3y_1 + 4y_2) + 3(3y_1 + 4y_2) =$$
$$= 17y_1^2 + 40y_1y_2 + 24y_2^2.$$

Определение. Квадратичная форма имеет канонический вид, если матрица *C* диагональна.

Из данного определения следует, что квадратичная форма в каноническом виде содержит только квадраты переменных и имеет вид

$$f(\bar{x}) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2.$$

Нормальным видом квадратичной формы называется сумма квадратов переменных с коэффициентами ± 1. Если $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \pm d_1 y_1^2 \pm d_2 y_2^2 \pm \ldots \pm d_n y_n^2$, то положив

$$z_i = \pm\sqrt{|d_i|}y_i \text{, если } d_i \neq 0,$$

$$z_i = y_i \text{, если } d_i = 0,$$

получим $f = \pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm \ldots \pm z_n^2$.

Теорема. Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду.

Доказательство. Обратимся к методу математической индукции по числу переменных. При *n*=1 квадратичная форма имеет канонический вид: $f(x_1) = a_{11}x_1^2$. Допустим, что для квадратичной формы от числа переменных, меньше чем *n*, теорема доказана.

Пусть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \ldots + c_{1n}x_1x_n + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 +$$
$$+ \ldots + c_{2n}x_2x_n + \ldots. + c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + \ldots + c_{nn}x_n^2$$

и пусть хотя бы один из коэффициентов $c_{ii} \neq 0$, например $c_{11} \neq 0$. сгруппируем все слагаемые, содержащие x_1, и вынесем коэффициент c_{11} за скобку. Получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{11}(x_1^2 + \frac{2c_{12}}{c_{11}}x_1x_2 + \ldots + \frac{2c_{1n}}{c_{11}}x_1x_n) + c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{2n}x_2x_n + \ldots. +$$
$$+ c_{n2}x_nx_2 + \ldots + c_{nn}x_n^2$$

Выделим теперь в первой скобке квадрат линейной формы:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{11}(x_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}}x_2 + \ldots + \frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n)^2 - c_{11}(\frac{c_{12}}{c_{11}}x_2 + \ldots + \frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n)^2 +$$
$$+ c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2 = c_{11}(x_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}}x_2 + \ldots + \frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n)^2 + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$$

где $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма от *n*-1 неизвестных $x_2, \ldots, x_n$. Осуществим следующее преобразование:

$$x_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}}x_2 + \ldots + \frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n = y_1,$$

$$x_2 = y_2,$$

....

$$x_n = y_n.$$

или

$$x_1 = y_1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} y_2 - \ldots - \frac{c_{1n}}{c_{11}} y_n, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Данное преобразование задается матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & \ldots & -\frac{c_{1n}}{c_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $|B| \neq 0$, то преобразование является невырожденным. Форма $\varphi(y_2, \ldots, y_n)$ зависит от n-1 переменных. В силу индуктивного предположения существует невырожденное линейное преобразование D такое, что

$$y_2 = d_{22} z_2 + \ldots + d_{2n} z_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = d_{n2} z_2 + \ldots + d_{nn} z_n$$

после которого квадратная форма $\varphi(y_2, \ldots, y_n)$ преобразуется в квадратичную форму $\varphi(z_2, \ldots, z_n)$. Добавляя к преобразованию еще одну строчку, получим

$$y_1 = z_1,$$

$$y_2 = d_{22} z_2 + \ldots + d_{2n} z_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = d_{n2} z_2 + \ldots + d_{nn} z_n /$$

Так как $|D| \neq 0$, то преобразование $Y=DZ$ невырожденное. В результате получим

$$f = d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 + \ldots + d_n z_n^2.$$

Если в квадратичной форме $f(\overline{x}) = X^T C X$ $c_{11} = c_{22} = \ldots = c_{nn} = 0$, то в этом случае осуществим линейное преобразование:

$$x_1 = y_1, \ldots, x_i = y_i + y_j, x_j = y_j \ldots, x_n = y_n.$$

После данного преобразования член $2c_{ij} x_i x_j$ преобразуется следующим образом:

$$2c_{ij} x_i x_j = 2c_{ij}(y_i + y_j) y_j = 2c_{ij} y_i y_j + 2c_{ij} y_j^2.$$

Коэффициент при y_j^2 отличен от нуля: $2c_{ij} \neq 0$. Теорема доказана.

Пример. Преобразовать квадратичную форму

$$f(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_2^2 + 6x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_4^2$$

к каноническому виду.

Решение. Матрица C квадратичной формы имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сгруппируем все члены, содержащие переменные x_1 и «выделим полный квадрат»:

$$f(\bar{x})=(x_1+x_2-x_3+2x_4)^2-(x_2-x_3+2x_4)^2+x_2^2+6x_2x_4+x_3^2-4x_3x_4+4x_4^2=$$
$$=(x_1+x_2-x_3+2x_4)^2+2x_2x_3+2x_2x_4$$

Осуществим линейное преобразование переменных:

$$x_1+x_2-x_3+2x_4=y_1, x_2=y_2, x_3=y_3, x_4=y_4$$

Выразим неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 через y_1, y_2, y_3, y_4:

$$x_1=y_1-y_2+y_3+2y_4, x_2=y_2, x_3=y_3, x_4=y_4,$$

полученные выражения подставим в квадратичную форму. Придем к форме

$$f(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^2+2y_2y_3+2y_2y_4.$$

Осуществляя вспомогательное преобразование $y_1=z_1, y_2=z_2, y_3=z_2+z_3, y_4=z_4$, получим:

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=z_1^2+2z_2(z_2+z_3)+2z_2z_4=z_1^2+2z_2^2+2z_2z_3+2z_2z_4.$$

Выделим полный квадрат в квадратичной форме:

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=2(z_2+\frac{1}{2}z_3+\frac{1}{2}z_4)^2+2(\frac{1}{2}z_3+\frac{1}{2}z_4)^2=$$
$$=2(z_2+\frac{1}{2}z_3+\frac{1}{2}z_4)^2-\frac{1}{2}z_3^2-z_3z_4-\frac{1}{2}z_4^2$$

Осуществим линейное преобразование переменных:

$$u_1=z_1, u_2=z_2+\frac{1}{2}z_3+\frac{1}{2}z_4, u_3=z_3, u_4=z_4$$

и выразим переменные z_1, z_2, z_3, z_4 через u_1, u_2, u_3, u_4:

$$z_1=u_1, z_2=u_2-\frac{1}{2}u_3-\frac{1}{2}u_4, z_3=u_3, z_4=u_4.$$

После указанных преобразований получим квадратичную форму, зависящую от переменных u_1, u_2, u_3, u_4:

$$f(u_1,u_2,u_3,u_4)=u_1^2+2u_2^2-\frac{1}{2}u_3^2-u_3u_4-\frac{1}{2}u_4^2=u_1^2+2u_2^2-\frac{1}{2}(u_3-u_4)^2.$$

Полагая $v_1=u_1, v_2=u_2, v_3=u_3+u_4, v_4=u_4$ и выражая переменные u_1, u_2, u_3, u_4 через v_1, v_2, v_3, v_4 получим

$$f(v_1,v_2,v_3)=v_1^2+2v_2^2-\frac{1}{2}v_3^2.$$

Канонический вид квадратичной формы содержит три переменных, а не четыре. Это связано с рангом квадратичной формы.

Определение. Рангом квадратичной формы называется ранг матрицы *C*. Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду означает, что для данной симметрической матрицы *C* существует такая невырожденная матрица *B*, что $B^TCB=D$, где *D* – диагональная матрица.

Из доказательства теоремы следует, что приведение квадратичной формы к каноническому виду может осуществляться бесконечным множеством способов – например, можно сделать произвольную линейную подстановку, а затем приступить к «выделению квадратов». Поэтому матрицы *B* и *D* определяются неоднозначно. Однако число ненулевых элементов матрицы *D* однозначно определено и равно рангу матрицы *C*.

7.3. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду

Теорема (о приведении действительной квадратичной формы к главным осям). Всякая действительная квадратичная форма $f(\bar{x})$ некоторым ортогональным преобразованием неизвестных может быть приведена к каноническому виду.

Доказательство. Применим метод индукции по числу n переменных. При n=1 утверждение очевидно. Допустим, что утверждение теоремы справедливо для квадратичной формы от n-1 переменных. Рассмотрим квадратичную форму от n переменных: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T CX$. Пусть $\bar{x}_1 = (t_{11}, t_{21}, ..., t_{n1})^T$ – нормированный собственный вектор матрицы C, соответствующий собственному значению λ_1. Примем $\bar{x}_1$ за первый столбец ортогональной матрицы

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразованной квадратичной формы есть $T^T CT$. Так как первый столбец матрицы T есть собственный вектор $\bar{x}_1$, то $C\bar{x}_1 = \lambda \bar{x}_1$. Тогда

$$CT = \begin{pmatrix} c_{11}t_{11} + c_{12}t_{21} + ... + c_{1n}t_{n1} + ... \\ c_{21}t_{11} + c_{22}t_{21} + ... + c_{2n}t_{n1} + ... \\ .... \\ c_{n1}t_{11} + c_{n2}t_{21} + ... + c_{nn}t_{n1} + ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 t_{11}... \\ \lambda_1 t_{21}... \\ .... \\ \lambda_1 t_{n1}... \end{pmatrix},$$

$$T^T CT = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 t_{11}... \\ \lambda_1 t_{21}... \\ .... \\ \lambda_1 t_{n1}... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 (t_{11}^2 + t_{21}^2 + ... + t_{n1}^2)... \\ \lambda_1 (t_{12}t_{11} + t_{22}t_{21} + ... + t_{n2}t_{n1})... \\ .... \\ \lambda_1 (t_{1n}t_{11} + t_{2n}t_{21} + ... + t_{nn}t_{n1})... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1... \\ 0... \\ ..... \\ 0... \end{pmatrix}$$

так как столбцы матрицы Т ортогональны и нормированы.

Матрица $T^T CT$ симметрична, поэтому имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где $B = (b_{ij})_{n,n}, i, j = 2,3,...,n$ – симметричная матрица.

Рассмотрим квадратичную форму с матрицей B. В силу индуктивного предположения найдется ортогональная матрица Q такая, что

$$Q^T BQ = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Положим $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Матрица Q_1 ортогональна, так как ее первый столбец нормирован и ортогонален остальным столбцам, а остальные столбцы попарно ортогональны и нормированы в силу ортогональности матрицы Q. Тогда

$$Q_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q^T B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q^T BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ и } Q_1^T T^T CTQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, определяется не однозначно. Однако из доказанной теоремы следует, что каково бы ни было ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму $-\lambda$, коэффициенты этого канонического вида равны собственным числам матрицы C, причем каждое собственное число повторяется столько раз, какова его кратность как корня характеристического уравнения.

Пример. Квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

привести к каноническому виду.

Решение. Определяем собственные значения матрицы квадратичной формы

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & - & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -3$.

Таким образом, канонический вид квадратичной формы следующий:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Найдем ортогональное преобразование, осуществляющее приведение $f(\overline{x})$ к каноническому виду.

Решая уравнение $(C - \lambda_i E)X^{(i)} = 0, i = \overline{1,4}$, найдем собственные векторы

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя данную систему векторов в ортонормируемую систему, получим

$$\bar{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{t}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \bar{t}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Данная система векторов определяет ортогональную матрицу $T = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4)$ преобразования переменных $x_j, j = \overline{1,4}$, в переменные $y_j, j = \overline{1,4}$. Действительно, $X=TY$, откуда $Y = T^{-1}X = T'X$.

Поэтому

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2),$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2 + 2x_3),$$

$$y_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

7.4. Положительно определенные квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма называется положительно определенной, если все ее значения при вещественных значениях переменных, не равных одновременно нулю, положительны. Очевидно, что квадратичная форма $f = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ положительно определена.

Определение. Квадратичная форма называется отрицательно определенной, если все ее значения отрицательны, за исключением ненулевого значения при ненулевых значениях переменных.

Определение. Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) полуопределенной, если она не принимает отрицательных (положительных) значений.

Квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются неопределенными.

При n=1 квадратичная форма $f = a_{11}x_1^2$ либо положительно определена (при a_{11}>0), либо отрицательно определена (при a_{11}<0). Неопределенные формы появляются при $n \geq 2$.

Теорема (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы). Для того чтобы квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + ... + c_{1n}x_1x_n + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 +$$
$$... + c_{2n}x_2x_n + ... + c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + ... + c_{nn}x_n^2$$

была положительно определена, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,\ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11}\ldots c_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{k1}\ldots c_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ldots, \Delta_n = |c| > 0\cdot$$

Доказательство. Используем индукцию по числу переменных, входящих в $f(\bar{x})$. Для квадратичной формы, зависящей от одной переменной x_1, $f(x_1) = a_{11}x_1^2$ и утверждение теоремы очевидно. Положим, что утверждение теоремы справедливо для квадратичной формы $f(\bar{x})$, зависящей от n-1 переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

1. Доказательство необходимости. Пусть

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} c_{in}x_i x_n - c_{nn}x_n^2$$

положительно определена. Тогда квадратичная форма

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}x_i x_j$$

будет положительно определенной, так как если $\varphi(\bar{x}') \le 0$ при $\bar{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, то при $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ $f(\bar{x}) \le 0$.

По предположению индукции все главные миноры формы $\varphi(\bar{x}')$ положительны, т.е.

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,\ldots, \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} c_{11}\ldots c_{1,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1,1}\ldots c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0\cdot$$

Остается доказать, что $\Delta_n = |c| > 0$.

Положительно определенная квадратичная форма $f(\bar{x})$ невырожденным линейным преобразованием $X=BY$ приводится к каноническому виду

$$f(\bar{y}) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \ldots + d_ny_n^2, \text{где } d_1 > 0, d_2 > 0,\ldots, d_n > 0.$$

Квадратичной форме $f(\bar{y})$ соответствует диагональная матрица

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

с определителем $|D| > 0$.

Линейное преобразование, заданное невырожденной матрицей B, преобразует матрицу C квадратичной формы в матрицу $D = B^TCB$, откуда $|D| = |B^T|\cdot|C|\cdot|B| = |C|\cdot|B|^2$. Но так как $|B| \ne 0$ и $|D| > 0$, то $|c| = \Delta_n > 0$.

2. Доказательство достаточности. Предположим, что все главные миноры квадратичной формы положительны: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0,\ldots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = |c| > 0$.

Докажем, что квадратичная форма $f(\bar{x})$ положительно определена. Из предположения индукции вытекает положительная определенность квадратичной формы $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Поэтому $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ невырожденным линейным преобразованием приводится к нормальному виду $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{n-1}^2$. Сделав соответствующую замену переменных $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ и положив $x_n = y_n$, получим

$$f(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_{in} y_i y_n + c_{nn} y_n^2,$$

где $b_{in}, i = 1,2,...,n-1$ – какие-то новые коэффициенты.

Осуществляя замену переменных $z_i = y_i + b_{in} y_n, i = \overline{1, n-1}, z_n = y_n$, получим

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + d_n z_n^2.$$

Определитель матрицы этой квадратичной формы равен d_n, а так как знак его совпадает со знаком Δ_n, то $d_n > 0$, и, значит, квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – положительно определена. Теорема доказана.

Для того чтобы квадратичная форма $f(\bar{x})$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$-f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-c_{ij}) x_i x_j$$

была положительно определенной, а значит, чтобы все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} -c_{11} & -c_{12} & ... & -c_{1n} \\ -c_{21} & -c_{22} & ... & -c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -c_{n1} & -c_{n2} & ... & -c_{nn} \end{pmatrix}$$

были положительны. Но это означает, что

$$\Delta_1 = c_{11} < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} < 0, ...$$

т.е. что знаки главных миноров матрицы C чередуются, начиная со знака минус.

Пример. Вычислить, является ли квадратичная форма положительно (отрицательно) определенной или неопределенной.

а) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - 6x_2 x_3$.

Решение. Матрица квадратичной формы f имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы C:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Квадратичная форма положительно определена.

б) $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1 x_2 - 8x_1 x_3 - 4x_2 x_3$.

Решение. Вычислим главные миноры матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Квадратичная форма является неопределенной.

В заключение сформулируем следующую теорему.

Теорема (закон инерции квадратичных форм). Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится квадратичная форма невырожденными линейными преобразованиями, не зависит от выбора этих преобразований.

7.5. Задания для самостоятельной работы по главе 7

7.1. Доказать, что если квадратичная форма с матрицей A положительно определена, то и квадратичная форма с обратной матрицей A^{-1} положительно определена.

7.2. Найти нормальный вид в области вещественных чисел

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

7.3. Найти нормальный вид в области вещественных чисел

$$x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

7.4. Найти нормальный вид в области вещественных чисел

$$x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

7.5. Найти нормальный вид в области вещественных чисел

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

7.6. Найти нормальный вид в области вещественных чисел

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

7.7. Привести квадратичную форму к каноническому виду с целыми коэффициентами

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

7.8. Привести квадратичную форму к каноническому виду с целыми коэффициентами

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

7.9. Привести квадратичную форму к каноническому виду с целыми коэффициентами

$$\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3.$$

7.10. Доказать, что в положительно определенной форме все коэффициенты при квадратах неизвестных положительны и что это условие не является достаточным для положительной определенности формы.

7.11. Выяснить, какие из форм эквивалентны между собой в области вещественных чисел

$$f_1 = x_1^2 - x_2x_3; \quad f_2 = y_1y_2 - y_3^2; \quad f_3 = z_1z_2 + z_3^2.$$

7.12. Выяснить, какие из форм эквивалентны между собой в области вещественных чисел

$$f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3;$$
$$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3;$$
$$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3.$$

7.13. Найти все значения параметра λ, при которых квадратичная форма положительно определена

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

7.14. Найти все значения параметра λ, при которых квадратичная форма положительно определена

$$2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$$

7.15. Найти все значения параметра λ, при которых квадратичная форма положительно определена

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Глава 8. Применение матричного исчисления к решению некоторых экономических задач

8.1. Использование операций над матрицами

Пример 1. Рассмотрим пример умножения матрицы на вектор. Анализируя продолжительность подписки на различные газеты, исследователи охарактеризовали вероятности перехода подписчика от одной газеты к другой в зависимости от продолжительности подписки с помощью соответствующей матрицы. Упрощенный вариант этой матрицы имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице для вероятностей перехода данные структурированы в соответствии с продолжительностью подписки: до одного года, от одного года до двух лет, более двух лет и, наконец, аннулированные подписки.

Предположим, что известно распределение 1000 подписчиков по этим категориям: 500 – принадлежат к 1-й категории, 200 – ко 2-й категории, 300 – к 3-й категории. Тогда вся группа, состоящая из 1000 подписчиков, может быть описана вектором-строкой:

$$X' = (500,200,300,0)$$

Для того чтобы определить вероятностное количество подписчиков в каждой из категорий через год, умножим X' на матрицу вероятностей перехода P:

$$X' \cdot P = (500,200,300,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,350,430,220) \cdot$$

Вектор, полученный после умножения, показывает, что из первоначальной тысячи подписчиков через год 350, вероятно, будут принадлежать к категории 2, 430- к категории 3 и 220 к категории 4.

Пример 2. Некоторое производственное объединение должно выпустить три вида продукции А1, А2, А3 в количествах, выраженных в процентах к плану, соответственно: 20%, 30% и 50%.

В объединении участвуют четыре предприятия, причем по плану предприятие №1 должно выпустить 30% всей продукции А1, 40% всей продукции А2 и 10% всей продукции А3. План для остальных предприятий соответственно следующий:

Номер предприятия	А1	А2	А3
предприятие №2	40%	10%	30%
предприятие №3	30%	20%	30%
предприятие №4	0%	30%	30%

Требуется найти процент выполнения плана объединения каждым предприятием.

Решение:

Для решения задачи применим операции над матрицами. Обозначим через $x_j, \quad j = \overline{1,4}$ количество продукции выпускаемой по плану *j*-ым предприятием, тогда получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot 100\%$$

Выполнив операцию умножения матриц в правой части, будем иметь следующие значения x_j:

$$x_1 = 23\%, \quad x_2 = 26\%, \quad x_3 = 27\%, \quad x_4 = 24\%..$$

Матричная алгебра находит большое применение при балансовых расчетах.

Пусть в народном хозяйстве имеется *n* отраслей. Проанализируем взаимоотношения между ними. Они выражаются в виде поставок друг другу соответствующей продукции (в денежном выражении) в течение некоторого периода, например, одного года.

Для *i*-ой отрасли часть продукции x_{i1} идет на потребление первой отраслью, x_{i2} – второй и т.д. Вообще x_{ij} – материальные затраты *i*-ой отрасли, потребляемые j-той отраслью $(x_{ij} \geq 0)$; x_{ii} – внутреннее потребление *i*-ой отрасли (очень часто $x_{ii} = 0$).

Пусть y_i – стоимость товаров *i*-ой отрасли, идущих на непроизводственное потребление (личное и общественное), накопление и экспорт – «конечный спрос».

Стоимость всего производства (валовая продукция) *i*-ой отрасли x_i равна сумме соответствующих затрат:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ii} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} + y_i$$

Межотраслевые взаимоотношения записываются в виде системы уравнений:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad где \quad i = \overline{1,n}. \tag{8.1.1}$$

Коэффициент $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ показывает количество продукции *i*-ой отрасли, используемой для производства единицы продукции *j*-той отрасли и считается постоянным в течении планируемого периода.

Подставляя $x_{ij} = a_{ij} x_j$ в уравнение (8.1.1) получим:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad где \quad i = \overline{1,n}. \tag{8.1.2}$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ – *матрица прямых затрат.*

Уравнение (8.1.2) межотраслевых связей можно записать в другом виде:

$$(E - A) \cdot X = Y \tag{8.1.3}$$

Определим, сколько продукции должна выпускать каждая отрасль, если известен *«конечный спрос»* отраслей. Решим матричное уравнение (8.1.3) относительно X. Для этого умножим его на обратную матрицу $(E-A)^{-1}$ слева:

$$(E-A)^{-1}\cdot(E-A)\cdot X=(E-A)^{-1}\cdot Y,$$

$$X=(E-A)^{-1}\cdot Y.$$

Матрица $S=(E-A)^{-1}=\left(S_{ij}\right)_{n\times n}$ называется *матрицей полных затрат.*_Элемент S_{ij} показывает количество *валовой продукции* i-ой отрасли, затрачиваемое на единицу конечной продукции j-ой отрасли. *Матрица S–A* называется *матрицей косвенных затрат.*

Пример 3. Рассмотрим систему двух отраслей экономики: промышленности и сельского хозяйства. Пусть матрица прямых затрат имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix},$$

и задан «конечный спрос» каждой отрасли соответственно 330 тыс. руб. и 66 тыс. руб. Каков должен быть валовой выпуск каждой отрасли?

Решение:

Составим матрицу E–A:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.4 & 0.5\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6 & -0.5\\ -0.3 & 0.8\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу для $(E-A)^{-1}$ с помощью присоединенной матрицы:

Определитель $|(E-A)|=0.48-0.15=0.33$,

$$(E-A)^{*}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}$$

Матрица полных затрат будет следующей:

$$S=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{80}{33} & \frac{50}{33}\\ \frac{30}{33} & \frac{60}{33}\end{pmatrix}$$

Валовой выпуск каждой отрасли составляет: $(E-A)^{-1}\cdot Y=X$

$$\begin{pmatrix}\frac{80}{33} & \frac{50}{33}\\ \frac{30}{33} & \frac{60}{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\ 66\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{80}{33}\cdot 330+\frac{50}{33}\cdot 66\\ \frac{10}{11}\cdot 330+\frac{20}{11}\cdot 66\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}900\\ 420\end{pmatrix}$$

Таким образом, выпуск промышленности составляет 900 тыс. руб., а сельского хозяйства – 420 тыс. руб.

Матрица косвенных затрат имеет вид:

$$(S-A)=\begin{pmatrix}\frac{80}{33} & \frac{50}{33}\\ \frac{10}{11} & \frac{20}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{334}{165} & \frac{67}{66}\\ \frac{67}{110} & \frac{89}{55}\end{pmatrix}$$

8.2. Модель планирования производства

Имеется определенное количество изделий (деталей, полуфабрикатов, узлов), которые необходимы для производства других изделий, в том числе конечной продукции. Между отдельными изделиями должны соблюдаться технологические соотношения. Например:

Детали

Узлы

Изделия

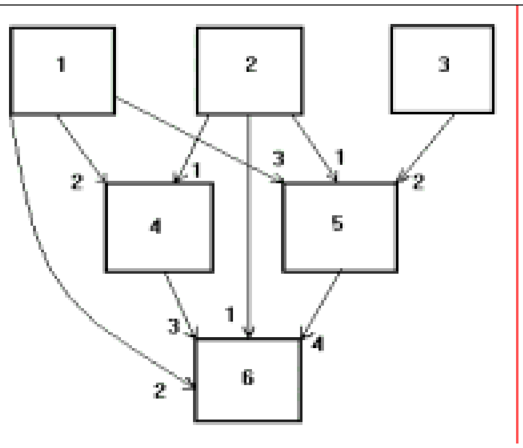


Рис. 1.

Стрелки и числа на них показывают, сколько единиц i-го изделия необходимо для изготовления единицы j-го изделия. В общем виде эта информация может быть представлена в виде матрицы затрат:

$$A = (a_{ij})_{n,n}.$$

Если, кроме того, требуется определенное количество деталей и узлов в качестве запасных частей, то для построения математической модели целесообразно также ввести

$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – общий выпуск,

$\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – конечный выпуск.

Тогда

$$x_1 = y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$
$$x_2 = y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$
$$...$$
$$x_n = y_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$$

$$\overline{X} = \overline{Y} + A \cdot \overline{X}$$

Если задан конечный выпуск, а требуется найти общий выпуск, то задача состоит в том, чтобы разрешить эту систему относительно X:

$$\overline{X} - \overline{A} \cdot X = \overline{Y}$$
$$E \cdot \overline{X} - A \cdot \overline{X} = \overline{Y}$$
$$(E - A) \cdot \overline{X} = \overline{Y}$$
$$\overline{X} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y}$$

8.3. Модель планирования материальных затрат

1. Расчет общих затрат материалов.

Для того чтобы заготовить нужное количество сырья и материалов, необходимо прежде всего рассчитать общие материальные затраты на предприятии.

Обозначим через b_{kj} – затраты материалов *k*-го вида на производство одного изделия *j*-го вида $(k=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$, а через $b_k=\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\cdot X_j$ – общие затраты материалов *k*-го вида.

Если объединить все b_k в вектор $\overline{b}=(b_1,b_2,...,b_m)^T$, а все b_{kj} в матрицу $B=(b_{kj})_{m,n}$, то имеет место равенство

$$\overline{b}=B\cdot\overline{x},$$

где B – матрица материальных затрат,

$\overline{b}$ – вектор суммарных материальных затрат.

Подставив X из (8.1.1) получим формулу для вектора суммарных материальных затрат

$$\overline{b}=B\cdot(E-A)^{-1}\cdot\overline{Y} \tag{8.3.1}$$

2. Расчет суммарной стоимости затраченных материалов.

Если заданы цены всех материалов $P_k \quad (k=\overline{1,m})$, то суммарная стоимость всех затраченных материалов вычисляется по формуле:

$$K=\overline{P}^T\cdot\overline{b}=\overline{P}^T\cdot B\cdot(E-A)^{-1}\cdot\overline{Y} \tag{8.3.2}$$

где $\overline{P}^T=(P_1,P_2,\ldots,P_m)$.

3. Расчет стоимости затрат по каждому виду материалов.

Если требуется определить стоимость затрат по каждому виду материалов, то целесообразно использовать не вектор, а диагональную матрицу цен, т.е.

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & P_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & P_m \end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{K}$ стоимости затрат по каждому виду материалов получается следующим образом:

$$\overline{K}=P\cdot\overline{b}=P\cdot B\cdot(E-A)^{-1}\cdot\overline{Y} \tag{8.3.3}$$

Пример: Рассчитать материальные затраты для схемы, изображенной на рис.1., если заданы:

$\overline{Y}=(3,1,5,7,9,10)$ – конечный выпуск,

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$ – матрица материальных затрат,

$\overline{P}=(12,3,6,10,4,3)$ – вектор цен.

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + y_1 \\ x_2 = x_4 + x_5 + x_6 + y_2 \\ x_3 = 2x_5 + y_3 \\ x_4 = 3x_6 + y_4 \\ x_5 = 4x_6 + y_5 \\ x_6 = y_6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} = \begin{pmatrix} 244 \\ 97 \\ 103 \\ 37 \\ 49 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ – общий выпуск,}$$

$$\overline{b} = B \cdot \overline{x} = \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix} \text{ – общая потребность в материалах,}$$

$$K = \overline{P}^T \cdot \overline{b} = (12,3,6,10,4,3) \cdot \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix} = 45369 \text{ – общая стоимость материальных ресурсов,}$$

$$\overline{K} = P \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\cdot 1433 \\ 3\cdot 1257 \\ 6\cdot 799 \\ 10\cdot 1044 \\ 4\cdot 1215 \\ 3\cdot 1436 \end{pmatrix}$$ – затраты по каждому виду материалов.

8.4. Балансовая модель производства

В основе балансовой модели лежат следующие основные положения о свойствах экономической системы:

1. Экономическая система состоит из экономических объектов, причем количество продукции, выпускаемой каждым объектом, характеризуется одним числом.
2. Для выпуска данного вида продукции каждый объект получает определенное количество других видов продукции – комплектность потребления.
3. *Свойство линейности:* увеличение выпуска продукции в некоторое число раз требует увеличения потребления объектом других видов продукции в тоже число раз.
4. Выпускаемая каждым объектом продукция частично потребляется другими объектами, а частично поступает во вне в качестве конечной продукции данной экономической системы.

Сформулированные выше предположения лишь приблизительно отражают реальную экономическую ситуацию.

Но, несмотря на это, балансовые модели являются удобным инструментом планирования ввиду их простоты.

1. Пусть экономическая система состоит из n – объектов $P_1, P_2, ..., P_n$.
2. Объем продукции, выпускаемой объектом P_i, обозначим через x_i.
3. Конечный продукт – через y_i.
4. Через x_{ij} обозначим ту часть продукции объекта P_i, которая потребляется объектом P_j.

Задача состоит в составлении плана для данной экономической системы, т.е. на основании n чисел $x_1, x_2, .., x_n$ определить n^2 чисел $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{ij}, ..., x_{n1}, ..., x_{nn}$.

Неизвестные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям 2-х типов:

- локальным ограничениям, характеризующим свойства объекта;
- глобальным ограничениям (требование равенства производства каждого вида продукции, потребности в ней)

1. Рассмотрим локальные ограничения свойств экономического объекта.

В экономической системе, для того, чтобы охарактеризовать один экономический объект P_i необходимо указать количество продукции $x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}$ других объектов P_j, $j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, необходимых объекту P_i для того, чтобы была произведена продукция объектом P_i.

В соответствии с предположением о комплектности, требуемое количество x_{ij} определяется однозначно с помощью технологических коэффициентов a_{ij} (заданные величины)

$$\begin{aligned} &x_{i1} = a_{i1}x_1 \\ &x_{i2} = a_{i2}x_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &x_{ij} = a_{ij}x_j \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Коэффициент a_{ij} – называется *коэффициентом прямых затрат.*

Данным коэффициентам соответствует матрица $A = (a_{ij})_{n,n}$, называемая матрицей прямых затрат.

Важной особенностью A является неотрицательность ее элементов, что запишем ее следующим образом $A \geq 0$

2. Рассмотрим глобальные ограничения.

Введем следующие обозначения:

$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор, характеризующий полный выпуск продукции всеми объектами.

$\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор, характеризующий объем продукции, идущей на конечное потребление.

Для того чтобы объект P_j мог выпустить x_j единиц продукции, он должен получить $a_{ij}x_j$ единиц продукции объекта P_i, $i = \overline{1,n}$.

Тогда все объекты системы должны получить единиц продукции $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ объекта P_i.

Т.к. объект P_i производит i-ый конечный продукт в объеме y_i, то полный выпуск продукции объектом P_i:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \; j = \overline{1,n} \tag{8.4.2}$$

Данная система уравнений (8.4.2) представляет собой систему уравнений балансовой модели и составляет модель Леонтьева.

В векторно-матричном виде перепишем систему следующим образом:

$$\bar{x} = Ax + \bar{y} \tag{8.4.3}$$

В системе (8.4.3) известными являются матрица A и вектор конечной продукции $\bar{y}$.

Неизвестным является $\bar{x}$, которое назовем планом данной экономической системы.

Для исследования системы балансовых уравнений перепишем систему (8.4.3) в следующем виде:

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y} \tag{8.4.4}$$

откуда

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}$$

Т.е. необходимым и достаточным условием существования и единственности решения уравнения (8.4.3) является невырожденность матрицы $(E - A)$.

Однако, исследование уравнений балансовой модели усложняется тем, что $\bar{x}$ должен удовлетворять условию неотрицательности.

Следует отметить, что не при любой неотрицательной матрице A система балансовых уравнений имеет неотрицательное решение.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.7 \\ -0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

тогда система балансовых уравнений имеет вид:

$$+\begin{cases} 0.1x_1 - 0.7x_2 = y_1 \\ -0.6x_1 + 0.2x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$-0.5(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

Из полученного уравнения следует, что если $y_1 + y_2 > 0$, то не существует неотрицательных чисел x_1 и x_2 удовлетворяющих системе балансовых уравнений.

С экономической точки зрения особый интерес представляют системы, которые имеют неотрицательные решения при любом $\bar{y} \geq 0$. Поэтому исследование систем балансовых уравнений сводится к установлению условий, которым должна удовлетворять неотрицательная матрица *A*, для того чтобы существовало неотрицательное решение $\bar{x}$ при любом $\bar{y} \geq 0$.

Определение.

Назовем неотрицательную матрицу *A* продуктивной, если существует хотя бы один такой положительный вектор $\bar{x}$, что $(E - A)\bar{x} > 0$.

С экономической точки зрения данное неравенство означает, что матрица *A* продуктивна, если существует такой план $\bar{x} > 0$, что каждый объект экономической системы производит некоторое количество конечной продукции.

Сформулируем критерий продуктивности матрицы *A*.

Неотрицательная матрица *A* продуктивная тогда и только тогда, когда матрица $S = (E - A)^{-1}$ существует и не отрицательна.

Продуктивность матрицы *A* является необходимым и достаточным условием существования, единственности и неотрицательности решений системы балансовых уравнений.

Рассмотрим экономический смысл матрицы $S = (E - A)^{-1}$:

1) Пусть $\bar{S}_j$ – *j*-ый столбец матрицы *S*, тогда $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \bar{S}_j \cdot y_j$

2) Рассмотрим частный случай вектора $\bar{y}$ конечной продукции:

$$y_j = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

Данное условие означает, что в экономической системе конечный продукт в количестве одной единицы выпускает только объект P_k, остальные объекты $P_1, P_2, ..., P_{k-1}, P_{k+1}, ..., P_n$ конечной продукции не выпускают.

В этом случае $\bar{x} = \bar{S}_{jk}$, $x_i = S_{ik}$, следовательно, элемент S_{ik} равен количеству продукции, которое должен выпустить объект P_i для того, чтобы объект P_k мог выпустить одну единицу конечной продукции.

Матрицу *S* называют матрицей полных затрат.

Пример.

Пусть экономическая система состоит из экономических объектов P_1 и P_2. Данные приведены в следующей таблице.

	P_1	P_2	$\bar{y}$	$\bar{x}$
P_1	100	160	240	500
P_2	275	40	85	400

Найти матрицу *A* по матрице *S*.

Решение:

1) Матрица *A* определяет коэффициенты

$$a_{ji} = \frac{x_{ji}}{x_i} \qquad x_{11} = 100 \qquad x_{21} = 275$$

$$x_{12} = 160 \qquad x_{22} = 40$$

$$x_1 = 500$$
$$x_2 = 400$$

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0.2 \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{160}{400} = 0.4$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{275}{500} = 0.55 \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{40}{400} = 0.1$$

Итак, $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 \end{pmatrix}$

2) $E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.55 & 0.9 \end{pmatrix}$

$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.8 & 9.8 \\ 1.1 & 1.6 \end{pmatrix}$

Следует отметить, что элементы матрицы *S* могут быть существенно больше элементов матрицы *A*. Это объясняется тем, что элементы S_{ij} указывают не только непосредственные поставки продукции объекта P_i объекту P_j, но и поставки продукции объекта P_i другим объектам для того, чтобы эти объекты могли в свою очередь поставить объекту P_j требуемые количества их продукции.

Из систем балансовых уравнений следует, что планируемый орган управляющий экономической системой может определить план если точно известны элемент a_{ij} матрицы *A* и размеры матрицы *A* не слишком велики. На практике эти условия не имеют места, но при решении практических задач известны характеристики определенных объектов, т.е. информация в экономической системе рассредоточена между объектами. Поэтому при построении плана работы экономической системы необходимо согласование планов не только между отдельными экономическими объектами, но и согласование планов с планирующим органом.

Назовем данную задачу задачей *управления.*

Процедура решения задачи управления состоит из ряда шагов обмена информацией между планирующим органом и экономическими объектами.

На каждом шаге планирующий орган устанавливает задание каждому объекту P_i на основании накопленной информации. После этого каждый объект сообщает планирующему органу, какое количество продукции других объектов ему необходимо для выполнения установленного задания.

Планирующий орган на основании информации экономических объектов составляет новый план для каждого объекта и т.д.

Назовем данную процедуру составления плана процедурой перезаказов.

Пусть $\overline{y}_0^0 = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ – вектор конечного продукта, который должен произвести исследование экономической системы.

На первом шаге планирующий орган сообщает каждому объекту P_j в качестве задания число $y_i^{(0)}$ в ответ объект P_j сообщает планирующему органу заказы на продукцию других объектов для выполнения задания $y_i^{(0)}$.

$$y_j^{(0)} \cdot \overline{a}_j = (a_{1j} y_1^{(0)}, a_{2j} y_2^{(0)}, \ldots, a_{nj} y_n^{(0)})$$

Из данного выражения следует, что для составления заказов объекту P_j должны быть известны только коэффициенты a_{ij} матрицы A и y_j конечной продукции.

Собрав всю информацию от всех объектов, планирующий орган составляет новое задание $\overline{y}^{(1)} = \overline{y}^{(0)} + A\overline{y}^0$.

На втором шаге планирующий орган сообщает экономическим объектам новое задание: объект P_j получает в качестве задания $y_j^{(1)}$. В ответ на полученное задание от объекта P_j поступает новый заказ, который равен $\overline{a}_j y_j^{(1)}$ и планирующим органом составляется новое задание $\overline{y}^{(2)} = (E + A + A^2)\overline{y}^{(2)}$, т.е. на *k-ом шаге* планирующим органом формируется задание $\overline{y}^{(k)} = (E + A + A^k)\overline{y}^{(k)}$.

Сформируем следующую теорему.

Теорема. Если матрица A продуктивная, то $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(k)} = (E - A)^{-1} \overline{y}_0$.

Из данной теоремы следует, что при $k \to \infty$ вектор задания y_k стремиться к вектору $(E - A)^{-1} \overline{y}^{(0)}$, являющемуся решением системы балансовых уравнений.

При составлении плана методов перезаказов можно предположить, что планирующему органу не следует решать систему балансовых уравнений, т.е. не следует предварительно рассчитывать план для экономической системы. Однако на практике процедура перезаказов может включать лишь небольшое число шагов k, поэтому при небольшом числе k ошибка в определении плана может быть велика. Если же планирующий орган на основании системы балансовых уравнений получит приближенное решение, то при этом существенно уменьшится ошибка в вычислении в процедуре перезаказов.

Для этого на первом шаге планирующий орган должен сообщить в качестве задания не вектор $\overline{y}^{(0)}$, а полученное им приближенное решение $\overline{\pi}^{(0)}$ и действовать так, как было описано выше.

При этом, чем меньше приближенное решение отличаются от точного решения, тем меньше число шагов требуется для выполнения процедуры перезаказов.

При исследовании экономической системы предполагается, что экономическим объектам требуется только продукция других объектов этой же системы. Однако, при решении практических задач должны учитываться факторы производства и потребности в продукции других экономических систем.

Назовем факторы производства и потребность в продукции других систем просто *факторами.*

Потребность экономической системы в факторах характеризуется вектором $\overline{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$, где Z_i – потребность в i –том факторе. Числа Z_i могут измеряться как в натуральных единицах, так и в денежных единицах.

Если потребление объекта P_j в факторах обозначим через $b_j = \{\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{mj}\}$, то матрица $B = (\beta_{ij})$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$ представляет собой матрицу прямых затрат факторов.

В этом случае план $\overline{x}$ для экономической системы равен $\overline{Z} = B \cdot \overline{x}$.

Следует отметить, что вектор $\overline{x}$ является решением системы балансовых уравнений, но т.к. факторы ограничены, то должно выполняться следующее условие: $B\overline{Z} < \overline{a}$, где $\overline{a}$ – вектор ограничений факторов.

Ответы и указания к заданиям для самостоятельной работы

Глава 1

1.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при четном n, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при n нечетном.

1.4. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

1.5. $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

1.6. $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

1.7. а) i-ая и j-ая строки произведения поменяются местами; б) к i-ой строке произведения прибавится j-ая строка, умноженная на с; в) i-ый и j-ый столбцы произведения поменяются местами; г) к i-му столбцу произведения прибавится j-ый столбец, умноженный на с.

Глава 2

2.1. 0.
2.2. 1.
2.3. 0.
2.5. 0.

2.6. *Решение*. Если $\frac{ax+b}{cx+d}=q$ при любом *x,* то $ax+b=q(cx+d)$, $a=qc$, $b=qd$ и $ad-bc=0$. Обратно, если $ad-bc=0$, то при $c\neq 0\neq d$ имеем $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=q$, $a=qc$, $b=qd$. При $c=0\neq d$ будет a=0 и, полагая $q=\frac{b}{d}$, снова имеем $a=qc$, $b=qd$. При $c\neq 0=d$ получим то же самое, полагая $q=\frac{a}{c}$. Поэтому $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{q(cx+d)}{cx+d}=q$ при любых *x*.

2.7. *Указание*. Все шесть членов определителя не могут равняться +1, так как тогда произведение трех членов: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ было бы равно произведению трех остальных членов, в то время как первое из этих произведений равно произведению всех девяти элементов определителя, а второе – тому же произведению девяти элементов с противоположным знаком. Далее, убедиться, что определитель отличен от 5 и что

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot$$

2.8. *Указание*. Показать, что все три положительных члена, входящих в определитель, не могут быть равны 1, и учесть, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot$$

2.9. *Указание*. Смежными транспозициями перевести 1 на первое место, затем 2 на второе место и т.д. Учесть, что одна смежная транспозиция изменяет число инверсий на единицу.

2.10. $i = 5, k = 1$.

2.11. $a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}$.

2.12. $x = 0,1,2,...,n-1$.

2.14. $8a + 15b + 12c - 19d$.

2.15. 90.

Глава 3

3.1. $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$.

3.3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4. $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$.

3.5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3.6. $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

3.7. $\dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & 2(n-3) & \dots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & 3(n-3) & \dots & 3 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & 4(n-3) & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$.

3.8. В матрице A^{-1} соответственно: а) поменяются местами i-ый и j-ый столбцы; б) i-ый умножится на $\frac{1}{c}$; в) из j-го столбца вычтется i-ый, умноженный на c. При преобразовании столбцов матрицы A аналогично указанному меняются строки матрицы A^{-1}.

3.9. $A^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & -U \\ O & E_l \end{pmatrix}$.

3.15 *Указание*. Используя линейное выражение всех столбцов матрицы A через столбцы, проходящие через минор d, показать, что если $d = 0$, то строки матрицы A, проходящие через d, линейно зависимы.

Глава 4

4.1. $x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1 \quad x_4 = -1;$

4.2. $x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = -1;$

4.3. $x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 0;$

4.4. $x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = -1;$

4.5. $x_1 = -0{,}4 \quad x_2 = -1{,}2 \quad x_3 = 3{,}4 \quad x_4 = 1;$

4.6. $x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \dfrac{1}{3} \quad x_4 = -\dfrac{3}{2};$

4.7. $x_1 = \dfrac{1}{2} \quad x_2 = -\dfrac{2}{3} \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -3;$

4.8. $x_1 = 104\frac{6}{7}$ $x_2 = 7\frac{4}{7}$ $x_3 = -10$ $x_4 = 1$;

4.9. $x_1 = 5$ $x_2 = 4$ $x_3 = 3$ $x_4 = 2$ $x_5 = 1$;

4.10. $x_1 = 3$ $x_2 = -5$ $x_3 = 4$ $x_4 = -2$ $x_5 = 1$;

4.11. Общее решение

$$x_3 = \frac{34x_1 - 17x_2 - 29}{5} \quad x_4 = \frac{16x_1 - 8x_2 - 16}{5}$$

Базисное решение

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -\frac{29}{5} \quad x_4 = -\frac{16}{5};$$

4.12. Система не совместна.

4.13. При $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ система имеет единственное решение

$$x_1 = 2 - \lambda^2 \quad x_2 = 2\lambda - 1 \quad x_3 = \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda - 1.$$

При и $\lambda = 0$ общее решение

$$x_1 = -x_2 - x_3,$$

где x_2, x_3 – свободные переменные.

При $\lambda = -3$ общее решение имеет вид

$$x_1 = x_3 \quad x_2 = x_3,$$

где x_3 – свободная переменная.

4.14. Общее решение

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{x_3 - 2x_5}{3} \quad x_4 = 0,$$

где x_3, x_5 – свободные переменные.

Фундаментальная система решений

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\frac{1}{3}$	1	0	0
0	$-\frac{2}{3}$	0	0	1

4.15. Общее решение

$$x_1 = -3x_3 - 5x \quad x_2 = 2x_3 + 3x_5 \quad x_4 = 0,$$

где x_3, x_5 – свободные переменные.

Фундаментальная система решений

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

Глава 5

5.2. Можно добавить векторы $(2,\ 2,\ 1,\ 0)$ *и* $(5,\ -2,\ -6,\ -1)$.

5.3. Например $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ *и* $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

5.4. $(1, \quad 1, \quad -1, \quad -2)$ *и* $(2, \quad 5, \quad 1, \quad 3)$

5.5. 3

5.7. $AB = BC = AC = 6; \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60°.$

5.8. $g(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}_1, \overline{a}_2$; $g(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$ равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$.

5.9. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

5.10. $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$

5.11. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

5.12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

5.13. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

5.15. УКАЗАНИЕ. При доказательстве необходимости получить равенство $B=CA$, где C – невырожденная матрица из коэффициентов в выражениях системы (2) через (1). При доказательстве достаточности приписать к матрице A снизу строку координат вектора b_i и, вычисляя ранг методом окаймляющих миноров, показать, что ранг полученной матрицы равен k.

Глава 6

6.1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1, \quad 1, \quad -1)$, где $c \neq 0$.

6.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1, \quad 2, \quad 0) + c_2(0, \quad 0, \quad 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

6.3. $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda = 1$ имеют вид $c(1, \quad 1, \quad 1)$, а для $\lambda = 0$ – вид $c(1, \quad 2, \quad 3)$, где $c \neq 0$.

6.4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3, \quad 1, \quad 1)$, где $c \neq 0$.

6.5. $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения $\lambda = 3$ имеют вид $c(1, \quad 2, \quad 2)$, а для $\lambda = -1$ – вид $c(1, \quad 2, \quad 1)$, где $c \neq 0$.

6.6. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения $\lambda = 1$ имеют вид $c_1(2, \quad 1, \quad 0) + c_2(1, \quad 0, \quad -1)$, а для $\lambda = -1$ – вид $c(3, \quad 5, \quad 6)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно, а $c \neq 0$.

6.7. $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + 3i, \quad \lambda_3 = 2 - 3i$. Собственные векторы для значения $\lambda = 1$ имеют вид $c(1, \quad 2, \quad 1)$, для $\lambda = 2 + 3i$ – вид $c(3 - 3i, \quad 5 - 3i, \quad 4)$, а для $\lambda = 2 - 3i$ – вид $c(3 + 3i, \quad 5 + 3i, \quad 4)$, где $c \neq 0$.

6.8. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda = 1$ имеют вид $c(0, \quad 0, \quad 0, \quad 1)$, а для $\lambda = 0$ – вид $c_1(0, \quad 1, \quad 0, \quad 0) + c_2(0, \quad 0, \quad 1, \quad 0)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

6.9. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda = 1$ имеют вид $c_1(1, \quad 0, \quad 1, \quad 0) + c_2(0, \quad 0, \quad 0, \quad 1)$, а для $\lambda = 0$ – вид $c_1(0, \quad 1, \quad 0, \quad 0) + c_2(0, \quad 0, \quad 1, \quad 0)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

6.10. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1, \quad 1, \quad -1, \quad 0) + c_2(1, \quad 1, \quad 0, \quad 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

6.14. Единственное собственное значение – $\lambda = 0$; собственные векторы – многочлены нулевой степени.

6.15. $\overline{e}_1 = -0{,}5\overline{p}_2 + 0{,}5\overline{p}_3; \quad \overline{e}_2 = -\overline{p}_1 + \overline{p}_2; \quad \overline{e}_3 = 2\overline{p}_1 - 0{,}5\overline{p}_2 - 0{,}5\overline{p}_3; \quad -(2, \quad 1, \quad -1)$.

Глава 7

7.2. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

7.3. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

7.4. $y_1^2 - y_2^2$.

7.5. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

7.6. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

7.7. $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2, \; y_1 = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + x_3, \quad y_2 = \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{10}x_3, \quad y_3 = \dfrac{1}{10}x_3$.

7.8. $3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2, \; y_1 = x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3, \quad y_2 = \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{1}{20}x_3, \quad y_3 = \dfrac{1}{20}x_3$.

7.9. $2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_4^2, \; y_1 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2, \quad y_2 = \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{6}x_3, \quad y_3 = \dfrac{1}{6}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4, \quad y_4 = \dfrac{3}{2}x_4$.

7.11. Формы f_1 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_2.

7.12. Формы f_2 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_1.

7.13. $\lambda > 2$.

7.14. $\left|\lambda < \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right|$.

7.15. $-0{,}8 < \lambda < 0$.

Контрольные задания

Контрольное задание 1

Для матриц A и B определить: 1) $(4A+3B)$; 2) $(BA-2AB)$.

Номер варианта	A	B
1.	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Контрольное задание 2

Вычислить определители матриц A и B:

Номер варианта	A	B
1.	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$
2.	$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$
3.	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$
4.	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix}$
5.	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$

6.	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$
7.	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$
8.	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & -5 & 8 \\ 6 & -5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & -8 & -4 & -5 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{vmatrix}$
9.	$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$
10.	$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$

Контрольное задание 3

Используя матрицы A и B, вычислить методом алгебраических дополнений и методом Жордана-Гусса: $(B-A)^{-1}$

Номер варианта	A	B
1.	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Контрольное задание 4

Найти ранг матрицы двумя способами: методом окаймляющих миноров и при помощи элементарных преобразований.

1. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ 10 & 9 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 21 & 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 12 & 3 & 1 \\ 1 & 18 & 24 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & -2 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 6 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 9 & 10 & 3 & 14 \\ 8 & 3 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 25 & 10 & 15 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ 24 & 16 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \\ 0 & 13 & 19 & -5 \end{pmatrix}$

Контрольное задание 5

Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным способом. После решения необходимо выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 8x_2 - 17x_3 = 17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ 5x_1+11x_2-16x_3=21 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1+6x_2-14x_3=16 \\ 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2+9x_3=9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -7x_1+3x_2+8x_3=75 \\ 9x_1-4x_2=-3 \\ x_1-7x_2-3x_3=12 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 13x_1-6x_2=32 \\ 8x_1+4x_2+x_3=12 \\ 2x_1+9x_2+5x_3=-5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x_1-4x_2=61 \\ 8x_1+9x_2-6x_3=48 \\ 9x_1-6x_2-2x_3=99 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x_1+3x_2+9x_3=-111 \\ -7x_1-4x_2-2x_3=52 \\ x_1-7x_2+3x_3=-47 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -5x_1+7x_2+11x_3=-2 \\ 2x_1+6x_2+3x_3=11 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=11 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=11 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-20 \\ 5x_1-2x_2+3x_3=-4 \end{cases}$

Контрольное задание 6

Решить системы уравнений методом Жордана-Гаусса. Если система является неопределенной, то в ответ записать одно базисное решение и одно частное, не являющееся базисным.

1. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+3x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+4x_4=5 \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5 \\ 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-13x_3=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+x_5=2 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+x_5=2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ 11x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 9x_4 = 1 \end{cases}$$

Контрольное задание 7

Решить однородные системы уравнений. В ответе записать фундаментальную систему решений.

1. $\begin{cases} x_1+5x_2-9x_3+8x_4=0 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=0 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=0 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=0 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+6x_3+4x_4=0 \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=0 \\ 6x_1-3x_2+3x_3-4x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=0 \\ 6x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1+x_2+6x_3-x_4=0 \\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+12x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=0 \end{cases}$

Контрольное задание 8

Установить линейную зависимость векторов.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 23 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \\ -22 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -50 \\ -41 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 50 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 25 \\ -29 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 33 \\ 42 \\ 18 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -9 \\ 48 \\ 66 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 65 \\ 7 \\ 32 \end{pmatrix}$

Контрольное задание 9

В базисе $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы. Установить, составляют ли они базис. Если составляют, то найти связь между новым и старым базисами, а так же найти компоненты вектора $\bar{p} = (2, \quad -5, \quad 4)$ в новом базисе.

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Контрольное задание 10

Найдите собственные значения и собственные вектора матриц.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

Список литературы

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
4. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1975.
5. Блох Э.Л, Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. – М.: Высшая школа, 1971.
6. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М., 1974.
8. Демидович Б.П. и Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966.
9. Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
10. Алферова З.В., Матричная алгебра. – М.: МЭСИ, 1997.
11. Линейная алгебра: учебное пособие / Балюкевич Э.Л., Горбовцов Г.Я., Громенко Т.С., Ковалева Л.Ф., Мокеева И.К.; Моск. эконом.-стат. ин-т. – М., 1988.